# 1. Lo spazio $L^1$

Avremo bisogno di calcolare integrali di funzioni definite su tutto $R$, e quindi ricordiamo brevemente alcuni esempi di funzioni integrabili.

**Definition 1.** *Si dice che una funzione $f$ appartiene ad $L^1(R)$ se esiste finito l'integrale*

$$\int |f(y)|dy < \infty$$

*In generale $L^1(I)$ indica l'insieme delle funzioni che hanno integrale limitato sull'intervallo $I$. Indicheremo*

$$||f||_{L^1} = \int |f(y)|dy$$

Ricordo che in generale le funzioni continue non sono integrabili su tutto $R$. Per esempio la funzione costante $f = 1$ non e' $L^1(R)$, perche' il suo integrale vale $+\infty$.

**Esempio 1.** *L'esempio piu semplice di funzione $L^1$ e' la funzione indicatrice di un intervallo, ovvero una funzione che vale 1 sull'intervallo, 0 altrove:*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \in [a, b] \\ 0 & se\ x \notin [a, b] \end{cases}$$

*E' chiaro che in questo caso, l'integrale di $f$ si puo' fare ed e' finito:*

$$\int f(x)dx = \int_a^b dx = b - a$$

**Definition 2.** *In generale se una funzione si annulla fuori da un intervallo $[a, b]$ si dice che la funzione ha supporto compatto, nell'intervallo stesso. La funzione indicatrice di un intervallo e' una funzione a supporto compatto.*

**Esempio 2.** *Puo' essere interessante considerare funzioni che sono continue, e a supporto compatto. Per esempio, la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} sin(x) & se\ x \in [0, \pi] \\ 0 & se\ x \notin [0, \pi] \end{cases}$$

*ha supporto in $[0, \pi]$ ed e' continua.*

**Esempio 3.** *La funzione*

$$f(x) = \begin{cases} sin^2(x) & se\ x \in [0, \pi] \\ 0 & se\ x \notin [0, \pi] \end{cases}$$

*ha supporto in $[0, \pi]$ ed e' derivabile anche in $0$. Infatti $\frac{d}{dx} sin^2(x) = 2\sin(x)\cos(x)$ che si annulla in $0$, come la derivata della costante $0$.*

*In generale, la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} sin^{k+1}(x) & se\ x \in [0, \pi] \\ 0 & se\ x \notin [0, \pi] \end{cases}$$

*questa funzione sara' derivabile $k$ volte nei punti $0$ e $\pi$, e quindi su tutto $R$. Ed e' a supporto compatto, precisamente a supporto nell'intervallo $[0, \pi]$*

*E' possibile anche costruire funzioni che siano $C^\infty$ e a supporto compatto.*

**Definition 3.** *L'insieme delle funzioni $C^\infty$ a supporto compatto si indica $C_0^\infty$*

Esistono anche funzioni $L^1$ che non sono a supporto compatto:

**Esempio 4.**

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se\ |x| \in [0,1] \\ \frac{1}{x^2} & se\ |x| \notin [0,1] \end{cases}$$

*Infatti*

$$\int |f(x)| dx = 2\int_0^1 dx + 2\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 2 - 2\Big[\frac{1}{x^2}\Big]_1^\infty = 4$$

**Esempio 5.**

$$f(x) = e^{-|x|}$$

*Infatti*

$$\int |f(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx = 2\int_0^\infty e^{-x} dx = -\big[e^{-x}\big]_0^\infty = 1$$

**Esempio 6.**

$$f(x) = e^{-x^2}$$

*Questo e' un esempio molto particolare. E' chiaro che la funzione esponenziale e' integrabile su tutto lo spazio, perche' tende a 0 piu rapidamente di tutti i polinomi. Pero' non si riesce a scriverne una primitiva in termini di funzioni elementari. L'integrale si calcola direttamente su tutto lo spazio.*

*Si procede in questo modo: Poniamo*

$$I = \int e^{-x^2} dx$$

*Allora*

$$I^2 = \int e^{-x^2} dx \int e^{-y^2} dy = \int\int e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

*Operando un cambio di variabili in coordinate polari*

$$I^2 = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\theta dr = -2\pi\Big[\frac{e^{-r^2}}{2}\Big]_0^\infty = \pi$$

*Quindi*

$$\int e^{-x^2} dx = I = \sqrt{\pi}$$

1.1. **la convoluzione.**

**Definition 4.** *Siano* $f\ g \in L^1(R)$*. Si dice convoluzione di* $f$ *e* $g$ *e si indica* $f\ *\ g$ *il seguente integrale*

$$(f\ *\ g)(x) = \int f(y)g(x-y)dy$$

**Remark 1.** *Formalmente la convoluzione e' una operazione, nel senso che, assegnate due funzioni che stanno in* $L^1$*, ci fornisce una nuova funzione, che sta sempre in* $L^1$*. Infatti*

$$\int |(f\ *\ g)|(x) = \int \Big| \int f(y)g(x-y)dy \Big| dx \leq$$

$$\leq \int \int |f(y)g(x-y)|dydx =$$

*(con il cambio di variabile* $z = x - y$*)*

$$\leq \int \int |f(y)g(z)|dydz = \int |f(y)|dy \int |g(z)|dz < \infty$$

*perche'* $f, g \in L^1$ *per ipotesi.*

Osserviamo che la convoluzione e' commutativa:

**Remark 2.** *Si tratta di dimostrare che*

$$(f\ *\ g)(x) = (g\ *\ f)(x)$$

$$(f\ *\ g)(x) = \int f(y)g(x-y)dy =$$

*con il cambio di variabile* $z = x - y$

$$= \int f(x-z)g(z)dz = (g\ *\ f)(x)$$

Scegliamo ora come funzione $g$ la funzione indicatrice di un intervallo, e cerchiamo di chiarire il significato geometrico della convoluzione:

**Esempio 7.** *Sia*

$$g(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \in [-a, a], \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

*Allora*

$$(f\ *\ g)(x) = \int f(y)g(x-y)dy =$$

*Per definizione di* $g$ *si avra'*

$$g(x-y) = \begin{cases} 1 & se\ x - y \in [-a, a], \Leftrightarrow -a \leq x - y \leq a \Leftrightarrow x - a \leq y \leq x + a \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

*Quindi*

$$(f\ *\ g)(x) = \int f(y)g(x-y)dy = \int_{x-a}^{x+a} f(y)dy.$$

*In altre parole la convoluzione ha il significato di una media, a meno di una costante, Si ha effettivamente una media, se dividiamo per la lunghezza dell'intervallo, ovvero se scegliamo invece di* $g$

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \textit{se } x \in [-a, a], \\ 0 & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

*Si vede che questa nuova funzione ha integrale* 1*, e che ragionando come sopra si ottiene*

$$(f \ * \ g)(x) = \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} f(y)dy.$$

*In questo caso la media e' fatta sull'intervallo* $[-a, a]$*, supporto di* $g$*.*

*Se* $g \in C_0^\infty$*, ha supporto compatto nell'intervallo* $[-a, a]$*, non e' costante, e ha integrale* 1*, allora la convoluzione vale*

$$(f \ * \ g)(x) = \int_{x-a}^{x+a} f(y)g(y)dy.$$

*Se l'integrale ha il significato di area, e la funzione* $g$ *e' interpretata come densita' di area, allora questo integrale esprime ancora l'area della funzione* $f$*, e siccome la funzione* $g$ *ha integrale 1, possiamo ancora interpretare questa convoluzione come media della funzione* $f$*, pesata rispetto alla densita'* $g$

**Proposition 1.** *Se* $f \in L^1$ *e* $g \in C_0^1$*, allora*

$$g \ * \ f \in C^1,$$

*anche se non ha necessariamente il supporto compatto. Inoltre*

$$\partial_x(g \ * \ f) = (\partial_x g) \ * \ f$$

*In generale se* $g \in C_0^\infty$*, allora* $g \ * \ f \in C^\infty$*.*

**Proof** Si ha

$$(f \ * \ g)(x) = \int f(y)g(x-y)dy$$

Derivando, e tenendo conto che la dipendenza da $x$ sta solo in $g$:

$$\partial_x(g \ * \ f) = \int f(y)\partial_x g(x-y)dy$$

Verifichiamo che sono soddisfatte le ipotesi del teorema di derivazione sotto il segno di integrale (si veda appendice)

- fissato $y$ esiste $\frac{\partial}{\partial x}\Big(f(y)g(x-y)\Big) = f(y)\frac{\partial}{\partial x}g(x-y)$
- $\int_I \sup_{x\in]a,b[} |\partial_x f(x,y)|dy = \int_I \sup_{x\in]a,b[} |f(y)\frac{\partial}{\partial x}g(x-y)|dy < +\infty$

Allora esiste

$$\partial_x \int_I f(x,y)dy = \int_I \partial_x f(x,y)dy$$

**Remark 3.** *Se* $f$ *e* $g$ *sono entrambe* $C^1$

$$\partial_x(g \ * \ f) = (\partial_x g) \ * \ f = g \ * \ (\partial_x f)$$

*In pratica la derivata della convoluzione puo' essere applicata ad una qualunque delle due funzioni,* $f$ *o* $g$*.*

## 2. Trasformata di Fourier

Si ottiene passando al limite nella serie di Fourier, e sostituendo la serie con un integrale su tutto lo spazio.

Procediamo formalmente. Abbiamo visto che una funzione $f$ si rappresenta sull'intervallo $[-T, T]$

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi kx}{T}},$$

dove $c_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(y)e^{-i\frac{2\pi ky}{T}}dy$

Formalmente sostituendo $c_k$ nell'espressione di $f$, si ottiene

$$f(x) = \frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{-T}^{T} f(y)e^{-i\frac{2\pi ky}{T}}dye^{i\frac{2\pi kx}{T}}.$$

Formalmente pensiamo di calcolare un integrale invece che una serie (e quindi pensando che $k$ adessio sia un numero reale)

$$f(x) = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-T}^{T} f(y)e^{-i\frac{2\pi ky}{T}}dye^{i\frac{2\pi kx}{T}}dk =$$

operiamo il cambiamento di variabili $\omega = \frac{2\pi k}{T}$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-T}^{T} f(y)e^{-i\omega y}dye^{i\omega x}d\omega.$$

Al limite per $T \to \infty$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\omega y}dye^{i\omega x}d\omega.$$

L'integrale interno si chiama trasformata di Fourier

**Definition 5.** *Se $f \in L^1(R)$, si dice trasformata di Fourier di $f$ la funzione*

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

*Si noti che la funzione $f$ iniziale e' una funzione della variabile $x$. Tuttavia la variabile $x$ e' la variabile di integrazione, e quindi la trasformata di Fourier, non dipende da $x$, ma da una nuova variabile $\omega$*

*La trasformata di Fourier si indica anche $\mathcal{F}(f(x))(\omega)$. Questa notazione permette di indicare sia la dipendenza dalla variabile iniziale $x$ (da cui dipende $f$), sia la dipendenza della nuova variabile $\omega$, da cui dipende la trasformata.*

**Remark 4.** *La formula che abbiamo ricavato, per il momento solo formalmente si dice formula di inversione,*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega.$$

*Naturalmente questa puo' valere se $\hat{f} \in L^1$, o comunque se l'integrale esiste.*

**Remark 5.** *Se $f$ e' una funzione pari, allora*

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\omega x)dx$$

*Se $f$ e' una funzione dispari, allora*

$$\hat{f}(\omega) = -i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\omega x)dx =$$

**Proof** *Infatti, se la funzione $f$ e' una funzione pari, allora la funzione $f(t)\sin(\omega x)$ e' dispari, e il suo integrale e' 0.*

*Se la funzione $f$ e' una funzione dispari, allora la funzione $f(t)\cos(\omega x)$ e' dispari, e il suo integrale e' 0.*

Calcoliamo alcune trasformate di Fourier

**Esempio 8.** *trasformata di Fourier della funzione indicatrice di un intervallo*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \in [a,b], \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = \int_a^b e^{-i\omega x}dx = \frac{e^{-i\omega b} - e^{-i\omega a}}{-i\omega}$$

**Esempio 9.** *trasformata di Fourier di $f = e^{-|x|}$ Poiche' $f$ e' pari*

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\infty}^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)dx =$$

$$2\int_0^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)dx = 2Re\Big(\int_0^{+\infty} e^{-i\omega x - x}dx\Big)$$

$$= Re\Big[\frac{e^{-x(1-i\omega}}{-1-i\omega}\Big] =$$

$$= 2Re\Big(\frac{1}{1+i\omega}\Big) = 2Re\Big(\frac{1-i\omega}{1+\omega^2}\Big) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

**Esempio 10.** *Trasformata di Fourier di $f = e^{-x^2}$ Applichiamo la definizione*

$$\hat{f}(\omega) = \int f(x)e^{-i\omega x}dx = \int e^{-x^2}e^{-i\omega x}dx =$$

*Cerchiamo di rappresentare l'esponente come un quadrato*

$$-x^2 - i\omega x = -\Big(x + \frac{i\omega}{2}\Big)^2 - \frac{\omega^2}{4}$$

*Sostituendo nell'integrale*

$$e^{-\frac{\omega^2}{4}}\int e^{-\left(x+\frac{i\omega}{2}\right)^2}dx =$$

*con il cambio di variabile $y = x + \frac{i\omega}{2}$*

$$= e^{-\frac{\omega^2}{4}}\int e^{-y^2}dy = \sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

2.1. **Proprieta' delle trasformate.**

**Proposition 2.** *Se* $f \in L^1$, *allora* $\hat{f}$ *e' limitata e*

$$|\hat{f}(\omega)| \leq ||f||_{L^1}$$

**Proof**

$$|\hat{f}(\omega)| \leq \int |f(x)e^{-i\omega x}|dx =$$

(poiche' l'esonenziale immaginario ha norma 1)

$$\int |f(x)|dx = ||f||_{L^1}.$$

**Proposition 3.** *Se* $f \in L^1$, *e* $c \neq 0$, *allora*

$$\mathcal{F}(f(cx))(\omega) = \frac{1}{|c|}\hat{f}\Big(\frac{\omega}{c}\Big)$$

**Proof**

$$\hat{f}(\omega) = \int f(cx)e^{-i\omega x}dx =$$

Operiamo un cambio di variabile, perche' nella trasformata di Fourier la variabile di integrazione e' l'argomento di $f$

Facciamo due casi, supponendo dapprima che $c > 0$ allora facciamo il cambio di variabile $y = cx$, e otteniamo

$$\int f(cx)e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-i\frac{\omega}{c}y}dy.$$

E in questo caso la tesi e' vera.

Se $c < 0$, facciamo lo stesso cambio di variabile, (l'unica cosa che cambia sono gli estremi: se $x = -\infty$, $c < 0$, allora $y = cx = +\infty$, e cosi al secondo estremo)

$$\int f(cx)e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{c}\int_{+\infty}^{-\infty} f(y)e^{-i\frac{\omega}{c}y}dy =$$

scambiamo gli estremi

$$-\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\frac{\omega}{c}y}dy =$$

usiamo il fatto che $c < 0$, quindi $|c| = -c$

$$\frac{1}{|c|}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\frac{\omega}{c}y}dy$$

**Proposition 4.** *Se* $f \in L^1$, *allora*

$$\mathcal{F}(f(x - x_0))(\omega) = e^{-i\omega x_0}\hat{f}(\omega)$$

**Proof**

$$\hat{f}(\omega) = \int f(x - x_0)e^{-i\omega x}dx =$$

Operiamo un cambio di variabile, perche' nella trasformata di Fourier la variabile di integrazione e' l'argomento di $f$ Poniamo $y = x - x_0$.

$$\hat{f}(\omega) = \int f(x)e^{-i\omega(y+x_0)}dx = e^{-i\omega x_0}\hat{f}(\omega)$$

**Proposition 5.** *Se* $f, f' \in L^1$, *e allora*

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = (i\omega)\hat{f}(\omega)$$

**Proof** L'ipotesi che $f' \in L^1$ garantisce l'esistenza della trasformata di Fourier. Calcoliamola

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = \int f'(x)e^{-i\omega x}dx =$$

integrando per parti

$$= i\omega \int f(x)e^{-i\omega x}dx$$

Iterando questa proposizione vediamo che,

**Proposition 6.** *Se* $f, f', \cdots f^{(n)} \in L^1$, *e allora*

$$\mathcal{F}(f^{(n)})(\omega) = (i\omega)^n\hat{f}(\omega)$$

**Proposition 7.** *Se* $f, xf \in L^1$, *e allora*

$$\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(-ixf(x))(\omega).$$

**Proof** Facciamo dapprima una verifica formale, scrivendo la definizione di derivata e derivando formalmente sotto al segno di integrale

$$\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega) = \int f(x)e^{-i\omega x}dx = \int f(x)(-ix)e^{-i\omega x}dx = \mathcal{F}(-ixf(x))(\omega)$$

Verifichiamo che si puo' derivare sotto al segno di integrale. Infatti

- la funzione $f(x)e^{-i\omega x}$ e' derivabile rispetto a $\omega$
- $$\int \sup_{\omega} |\partial_\omega\Big(f(x)e^{-i\omega x}\Big)|dx = \int \sup_{\omega} |f(x)(-ix)|dx < +\infty$$
  perche' $xf(x) \in L^1$.

Iterando questa proposizione, si ottiene

**Proposition 8.** *Se* $f, xf, \cdots x^n f \in L^1$, *e allora*

$$\frac{d^n}{d\omega^n}\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\Big((-ix)^n f(x)\Big)(\omega).$$

**Proposition 9.** *Se* $f, g \in L^1$, *e allora*

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}.$$

**Proof**

$$\widehat{f * g} = (\int (f * g)(x)e^{-i\omega x}dx) =$$

per definizione di convoluzione

$$= \int\int f(y)g(x-y)dye^{-i\omega x}dx =$$

con il cambio di variabile $z = x - y$

$$= \int \int f(y)g(z)dye^{-i\omega(z+y)}dz = \int f(y)e^{-i\omega y}dy \int g(z)e^{-i\omega z}dz = \hat{f}\hat{g}.$$

2.2. **Funzioni a decrescenza rapida.** Nelle proposizioni precedenti abbiamo richiesto che la funzione $f$ stesse in $L^1$ per calcolare la trasformata di Fourier. Poi abbiamo richiesto che tutte le sue derivate stessero in $L^1$, ed infine per calcolare la derivata della trasformata, abbiamo richiesto che $x^n f$ stesse in $L^1$. Diamo quindi una definizione di classe di funzioni che hanno tutte queste proprieta', e nel quale tutte le proposizioni prima menzionate si possono applicare. Si tratta dello spazio delle funzioni a decrescenza rapida:

**Definition 6.** *Si dice che una funzione $f$ e' a decrescenza rapida se e' di classe $C^\infty$ e per ogni $p, q \in N$ esistono costanti $C_{pq}$ tali che*

$$|x^p f^{(q)}| \leq C_{pq}$$

*L'insieme delle funzioni a decrescenza rapida si indica con $S$.*

La condizione che definisce le funzioni a decrescenza rapida si puo' scrivere nella forma seguente:

$$|f^{(q)}| \leq \frac{C_{pq}}{x^p}$$

Questa condizione non dice niente in 0, perche' il secondo membro tende all'infinito. Invece limita la crescita di $f$, che quindi tende a 0 per $|x| \to \infty$ piu rapidamente di tutte le funzioni razionali.

**Esempio 11.** *Ogni funzione $C_0^\infty$ e' a decrescenza rapida, perche' e' nulla all'infinito, e quindi va a 0 piu rapidamente di tutte le funzioni razionali. La funzione $f(x) = e^{-x^2}$ e' una funzione a decrescenza rapida. Infatti decresce piu rapedamente di tutte le funzioni razionali.*

**Remark 6.** *Osserviamo che se $f \in S$, allora $f \in L^1$. Infatti*

$$|f(x)| \leq C_{00} \quad |f(x)| \leq \frac{C_{20}}{|x|^2}$$

*Allora*

$$\int |f(x)|dx \leq \int_{|x|\leq 1} |f(x)|dx + \int_{|x|\geq 1} |f(x)|dx \leq$$
$$\leq \int_{|x|\leq 1} C_{00}dx + \int_{|x|\geq 1} \frac{C_{20}}{|x|^2}dx = 2C_{00} + 2C_{20}$$

**Remark 7.** *Osserviamo che se $f$ sta in $S$, allora tutte le sue derivate stanno in $S$, pertanto tutte le derivate stanno in $L^1$, quindi la proposizione 6 si puo' sempre applicare. Inoltre la funzione $f$ moltiplicata per un qualsiasi monomio sta ancora in $S$, e quindi in $L^1$. Ne viene per la proposizione 8 che la trasformata di Fourier di una funzione di $S$ e' una funzione $C^\infty$*

**Proposition 10.** *Proviamo che se $f \in S$, allora $\hat{f} \in S$.*

**Proof** Sappiamo gia' che se $f$ appartiene ad $S$, allora la sua trasformata e' una funzione $C^\infty$. Si tratta di dimostrare che la funzione tende a zero piu velocemente dei polinomi. Naturalmente siccome lavoriamo con la trasformata, ci riferiamo alla variabile $\omega$, invece che alla variabile $x$:

$$|\omega^p \hat{f}^q| = \left|\omega^p \mathcal{F}\Big((-ix)^q f(x)\Big)(\omega)\right|$$

per la proprieta' 5

$$\left|\mathcal{F}\Big(\frac{d^p}{dx^p}((-ix)^q f(x))\Big)(\omega)\right| \leq$$

per la proprieta' 2

$$\left|\left|\frac{d^p}{dx^p}\Big((-ix)^q f(x)\Big)(\omega)\right|\right|_{L^1} = C_{pq},$$

perche' la norma $L^1$ e' una costante che dipende da $p$ $q$. Abbiamo quindi dimostrato che $\hat{f} \in S$.

Quindi se prendiamo una funzione che sta in $S$, allora la sua trasformata sta ancora in $S$, e puo' essere ulteriormente trasformata e derivata infinite volte. In particolare per le funzioni di $S$ vale la formula di inversione che abbiamo ricavato all'inizio del capitolo:

**Proposition 11. formula di inversione**, *Se $f \in S$, allora*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega.$$

Osserviamo che la relazione precedente si puo' scrivere anche nella forma

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(\hat{f}(\omega))(-x).$$

## 3. Appendice

.

Enunciamo qui alcuni teoremi di passaggio al limite sotto al segno di integrale, e di derivazione sotto al segno di integrale.

**Theorem 1. convergenza dominata** *Sia $I$ un intervallo reale, (eventualmente tutto $R$) e sia $f : ]a,b[ \times I \to R$ una funzione delle variabili $(x,y) \in ]a,b[ \times I$ supponiamo poi che*

- *fissato $y$ esista* $\lim_{x \to x_0} f(x,y)$
- $\int_I \sup_{x \in ]a,b[} |f(x,y)| dy < +\infty$

*Allora esiste*

$$\lim_{x \to x_0} \int_I f(x,y)dy = \int_I \lim_{x \to x_0} f(x,y)dy$$

**Theorem 2. derivazione sotto il segno di integrale**. *Sia $I$ un intervallo reale, (eventualmente tutto $R$) e sia $f : ]a, b[ \times I \to R$ una funzione delle variabili $(x, y) \in ]a, b[ \times I$ supponiamo poi che*

- *fissato $y$ esista $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$*
- $\int_I \sup_{x \in ]a,b[} |\partial_x f(x, y)| dy < +\infty$

*Allora esiste*

$$\partial_x \int_I f(x, y) dy = \int_I \partial_x f(x, y) dy$$