

## 1. EQUAZIONE DEL CALORE SU TUTTO LO SPAZIO

Consideriamo l'equazione differenziale

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in R \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in R \end{cases}$$

Supponiamo di fissare la variabile  $t$ , e facciamo una trasformata di Fourier nella sola variabile  $x$ :

$$\begin{cases} \hat{u}_t = -\omega^2 \hat{u} & \omega \in R \quad t > 0 \\ \hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega) & \omega \in R \end{cases}$$

Ora pensiamo che sia invece fissata la variabile  $\omega$  e consideriamo questa come un'equazione differenziale nella sola variabile  $t$ . La soluzione sarà

$$\hat{u} = \hat{f} e^{-\omega^2 t}$$

Ricordo che

$$e^{-\frac{\omega^2}{4c^2}} = \mathcal{F}\left(\frac{|c|}{\sqrt{\pi}} e^{-(cx)^2}\right)(\omega)$$

Pertanto scegliendo  $c = \frac{1}{\sqrt{4t}}$  si ottiene

$$\hat{u} = \hat{f} \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right) = \mathcal{F}\left(f * \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right).$$

Ne viene che

$$u = f * \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}.$$

**Definition 1.** La funzione  $\Gamma(x, t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}$  si dice soluzione fondamentale dell'equazione del calore.

**Remark 1.** Osserviamo che la soluzione fondamentale ha il comportamento seguente:

- $\lim_{t \rightarrow 0} \Gamma(x, t) = 0$  se  $x \neq 0$
- $\lim_{t \rightarrow 0} \Gamma(x, t) = +\infty$  se  $x = 0$
- $(\partial_t - \partial_{xx})\Gamma(x, t) = 0$  per  $t > 0$
- $\int \Gamma(x, t) dx = 1$  per ogni  $t$

Verifichiamo la prima. Supponiamo infatti che  $x \neq 0$ . L'argomento dell'esponenziale che definisce  $\Gamma$ ,  $\frac{x^2}{4t}$  tende a  $+\infty$  per  $t \rightarrow 0$ . Quindi

$$e^{-\frac{x^2}{4t}} \rightarrow 0$$

per  $t \rightarrow 0$ . E siccome l'esponenziale tende a 0 più rapidamente del polinomio al denominatore, allora risulta che

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Gamma(x, t) = 0 \quad \text{se } x \neq 0$$

Consideriamo la seconda condizione. Per  $x = 0$  l'espressione di  $\Gamma$  diventa

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \rightarrow +\infty$$

per  $t \rightarrow 0$ .

La condizione

$$(\partial_t - \partial_{xx})\Gamma(x, t) = 0$$

per  $t > 0$  e' una verifica diretta.

Verifichiamo l'ultima:

$$\int \Gamma(x, t) dx = \int \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} dx =$$

con il cambio di variabile  $y = \frac{x}{2\sqrt{t}}$

$$\int \frac{e^{-y^2}}{\sqrt{\pi}} dx = 1$$

**Proposition 1.** *Verifichiamo che la funzione che abbiamo trovato soddisfa il problema. Ovvero proviamo che*

- $u_t = u_{xx} \quad x \in R \quad t > 0$
- $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = f(x) \quad x \in R$

La prima condizione ci obbliga a calcolare una derivata in un punto  $t_0 > 0$ . Precisamente dobbiamo derivare la funzione  $u$ .

$$u = f * \Gamma = \int_R \Gamma(x - y, t) f(y) dy$$

Se si puo derivare sotto al segno di integrale, si ha

$$\left( \partial_t - \partial_{xx} \right) u = \int_R \left( \partial_t - \partial_{xx} \right) \Gamma(x - y, t) f(y) dy = 0,$$

per il lemma precedente.

*Rimane da verificare che la derivazione e' lecita. Visto che dobbiamo derivare in un intorno di questo punto, possiamo pensare che la funzione  $u$  sia definita in un intorno del punto  $t_0$ , diciamo che sia definita nell'intervallo  $I = [\frac{t_0}{2}, \frac{3t_0}{2}]$  Abbiamo pertanto una funzione  $\Gamma(x - y, t) f(y)$ , tale che*

•

$$\exists \partial_t \Gamma(x - y, t) f(y) = \frac{x^2}{4t^2} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} - \frac{1}{2} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t^3}}$$

per  $t \in I = [\frac{t_0}{2}, \frac{3t_0}{2}]$

• *stimiamo*

$$\int \sup_{t \in I, x \in R} |\partial_t \Gamma(x - y, t) f(y)| dy$$

*Osserviamo che  $y^2 e^{-y^2}$  e' una funzione limitata, quindi se chiamiamo*

$$C = \max |y^2 e^{-y^2}|,$$

si ha  $\frac{x^2}{4t} e^{-\frac{x^2}{4t}} \leq C$  e di conseguenza

$$\left| \frac{x^2}{4t^2} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \right| \leq \left| \frac{C}{t} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \right| \leq \left| \frac{C}{t_0} \sqrt{\frac{2}{\pi t_0}} \right|,$$

se  $t \in I$ . Analogamente, usando il fatto che  $e^{-\frac{x^2}{4t}} \leq 1$ , si ha

$$\left| \frac{1}{2} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t^3}} \right| \leq \sqrt{\frac{1}{2\pi t_0^3}}$$

Quindi

$$\begin{aligned} & \int \sup_{t \in I, x \in R} |\partial_t \Gamma(x-y, t) f(y)| dy \\ = & \int \sup_{t \in I, x \in R} \left| \left( \frac{x^2}{4t^2} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} - \frac{1}{2} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t^3}} \right) f(y) \right| dy \leq \left( \sqrt{\frac{1}{2\pi t_0^3}} + \frac{C}{t_0} \sqrt{\frac{2}{\pi t_0}} \right) \int |f(y)| dy \end{aligned}$$

Allora valgono le ipotesi del teorema di convergenza dominata e quindi si puo' derivare sotto il segno di integrale rispetto a  $t$ . Analogamente si puo' derivare rispetto a  $x$  due volte, e si ottiene

$$\left( \partial_t - \partial_{xx} \right) u = \int_R \left( \partial_t - \partial_{xx} \right) \Gamma(x-y, t) f(y) dy = 0,$$

Verifichiamo ora la seconda condizione

$$u = f * \Gamma = \int_R \Gamma(x-y, t) f(y) dy = \int_R \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} f(y) dy$$

con il cambio di variabile  $z = \frac{x-y}{\sqrt{4t}}$

$$= \int_R e^{-z^2} f(x - 2\sqrt{t}z) \frac{dz}{\sqrt{\pi}} \rightarrow \int_R e^{-z^2} \frac{dz}{\sqrt{\pi}} = f(x),$$

per  $t \rightarrow 0$ , se possiamo passare al limite sotto al segno di integrale.

Per passare al limite sotto al segno di integrale usiamo il teorema di convergenza dominata

•

$$\exists \lim_{t \rightarrow 0} e^{-z^2} f(x - 2\sqrt{t}z) = e^{-z^2} f(x)$$

•

$$\int_R \sup_{t, x} |e^{-z^2} f(x - 2\sqrt{t}z)| \frac{dz}{\sqrt{\pi}} \leq \max |f| \int_R e^{-z^2} \frac{dz}{\sqrt{\pi}} < \infty$$

Per il teorema della convergenza dominata il passaggio al limite si puo' fare.

**Remark 2.** Osserviamo esplicitamente che la funzione  $u$  ammette due rappresentazioni: in una la dipendenza da  $x$  compare in  $\Gamma$ ,

$$u = \int_R \Gamma(x-y, t) f(y) dy$$

Nell'altra la dipendenza compare in  $f$ .

$$\int_R e^{-z^2} f(x - 2\sqrt{t}z) \frac{dz}{\sqrt{\pi}}$$

Noi siamo passati al limite nella seconda. Infatti un passaggio al limite nella prima espressione non si puo' fare. Se tentassimo in maniera formale otterremmo:

$$\lim_{t \rightarrow 0} u = \int_R \lim_{t \rightarrow 0} \Gamma(x-y, t) f(y) dy = 0$$

Questo giustifica il fatto che per passare al limite occorre sempre usare un teorema opportuno.

Osserviamo esplicitamente che il problema della diffusione del calore si può studiare anche in  $R^n$

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in R^n \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in R^n \end{cases}$$

In questo caso la soluzione fondamentale si scrive nella forma

$$\Gamma(x, t) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}}$$
 e la soluzione si scriverà

$$u * \Gamma,$$

dove la convoluzione è da intendersi in  $R^n$ .

Consideriamo ora su tutto lo spazio un problema diverso. Ovvero la diffusione del calore in presenza di una sorgente  $g$ .

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + g & x \in R \quad t > 0 \\ u(x, 0) = 0 & x \in R \end{cases}$$

Supponiamo di fissare la variabile  $t$ , e facciamo una trasformata di Fourier nella sola variabile  $x$ :

$$\begin{cases} \hat{u}_t = -\omega^2 \hat{u} + \hat{g} & \omega \in R \quad t > 0 \\ \hat{u}(\omega, 0) = 0 & \omega \in R \end{cases}$$

Ora pensiamo che sia invece fissata la variabile  $\omega$  e consideriamo questa come un'equazione differenziale nella sola variabile  $t$ . Portiamo tutta la dipendenza da  $u$  a primo membro

$$\hat{u}_t + \omega^2 \hat{u} = \hat{g}$$

La soluzione si cerca con il metodo del fattore integrante. Il fattore integrante è in questo caso  $e^{\omega^2 t}$  quindi moltiplicando per questo fattore si ha

$$\hat{u}_t e^{\omega^2 t} + \omega^2 \hat{u} e^{\omega^2 t} = \hat{g} e^{\omega^2 t}$$

Al primo membro viene la derivata di un prodotto

$$\frac{d}{dt} (\hat{u}_t e^{\omega^2 t}) = \hat{g} e^{\omega^2 t}$$

Integriamo

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau} (\hat{u}_\tau e^{\omega^2 \tau}) = \int_0^t \hat{g}(\omega, \tau) e^{\omega^2 \tau} d\tau$$

Quindi

$$\hat{u}_t = \int_0^t \hat{g}(\omega, \tau) e^{-\omega^2(t-\tau)} d\tau$$

Ricordo che

$$e^{-\frac{\omega^2}{4c^2}} = \mathcal{F}\left(\frac{|c|}{\sqrt{\pi}} e^{-(cx)^2}\right)(\omega)$$

Pertanto scegliendo  $c = \frac{1}{\sqrt{4(t-\tau)}}$  si ottiene

$$\hat{u} = \int_0^t \hat{g}(\omega, \tau) \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}}\right) =$$

E quindi, antitrasformando

$$u = \int_0^t g *_x \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}} = \int_0^t \int_R g(y, \tau) \Gamma(x-y, t-\tau) dy d\tau =$$

La funzione  $g$  e la soluzione fondamentale sono definite solo per valori positivi del tempo. Possiamo pensare che siano nulle, per valori del tempo negativi. Quindi se  $\tau < 0$ ,  $g(\omega, \tau) = 0$ , se  $\tau > t$ ,  $\Gamma(x-y, t-\tau) = 0$ . Quindi la soluzione si scrive

$$u = \int_R \int_R g(y, \tau) \Gamma(x-y, t-\tau) dy d\tau = g *_R \Gamma$$

**Proposition 2.** *Verifichiamo che la funzione che abbiamo trovato soddisfa il problema. Ovvero proviamo che se  $g \in C_0^\infty$ , allora*

$$u_t - u_{xx} = g \quad x \in R \quad t > 0$$

**Proof**

$$u = \int_R \int_R g(x-y, t-\tau) \Gamma(y, \tau) dy d\tau.$$

Derivando formalmente sotto il segno di integrale

$$\begin{aligned} u &= \int_R \int_R (\partial_t - \partial_{xx}) g(x-y, t-\tau) \Gamma(y, \tau) dy d\tau = \\ &= \int_R \int_R (-\partial_\tau - \partial_y) g(x-y, t-\tau) \Gamma(y, \tau) dy d\tau = \end{aligned}$$

Teniamo conto che  $\Gamma(y, \tau) = 0$  se  $\tau < 0$ , e che  $g$  ha supporto compatto, quindi  $g(x-y, t-\tau) = 0$  se  $|y| > a$ , oppure  $t > b$ , per due opportune costanti  $a, b$

$$= \int_0^b \int_{-a}^a (-\partial_\tau - \partial_y) g(x-y, t-\tau) \Gamma(y, \tau) dy d\tau$$

Ora il problema di  $\Gamma$  e' costituito dal fatto che in  $t = 0$  la funzione tende a  $+\infty$  Quindi per fare dei conti, occorre stare lontano dal punto 0.

$$\begin{aligned} u &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^b \int_{-a}^a (-\partial_\tau - \partial_{yy}) g(x-y, t-\tau) \Gamma(y, \tau) dy d\tau = \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} & - \int_\epsilon^b \int_{-a}^a \partial_\tau g(x-y, t-\tau) \Gamma(y, \tau) dy d\tau - \int_\epsilon^b \int_{-a}^a \partial_{yy} g(x-y, t-\tau) \Gamma(y, \tau) dy d\tau \\ & \text{per parti} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} & - \left[ \int_{-a}^a g(x-y, t-\tau) \Gamma(y, \tau) dy \right]_{t=\epsilon}^{t=b} + \\ & \int_\epsilon^b \int_{-a}^a g(x-y, t-\tau) \partial_\tau \Gamma(y, \tau) dy d\tau \\ & - \int_\epsilon^b \int_{-a}^a g(x-y, t-\tau) \partial_{yy} \Gamma(y, \tau) dy d\tau = \end{aligned}$$

Ora usiamo il fatto che

$$\partial_\tau \Gamma(y, \tau) - \partial_{yy} \Gamma(y, \tau) = 0,$$

e i due integrali si cancellano. Otteniamo

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} - \left[ \int_{-a}^a g(x-y, t-\tau) \Gamma(y, \tau) dy \right]_{t=\epsilon}^{t=b} =$$

(tenendo conto che  $g(b) = 0$ , ed e' nulla fuori da  $[-a, a]$  )

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_R g(x-y, t-\epsilon) \Gamma(y, \epsilon) dy = g(x, t)$$

**Remark 3.** Osserviamo che non possiamo invece derivare formalmente  $\Gamma$  sotto il segno di integrale, perche' formalmente

$$u = \int_R \int_R g(y, \tau) \Gamma(x-y, t-\tau) dy d\tau$$

Quindi

$$(\partial_t - \partial_{xx})u = (\partial_t - \partial_{xx}) \int_R \int_R g(y, \tau) \Gamma(x-y, t-\tau) dy d\tau =$$

$$\int_R \int_R g(y, \tau) (\partial_t - \partial_{xx}) \Gamma(x-y, t-\tau) dy d\tau = 0,$$

e quindi non si ottiene il fatto che

$$(\partial_t - \partial_{xx})u = g$$

**Il problema del calore con dato iniziale e sorgenti** Vogliamo risolvere il problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + g & x \in R \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in R \end{cases}$$

Indichiamo con  $u_1$  la soluzione del problema con dato iniziale diverso da 0:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in R \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in R \end{cases}$$

$$u_1 = \Gamma_R f$$

Indichiamo con  $u_2$  la soluzione del problema con dato iniziale nullo e con una sorgente:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + g & x \in R \quad t > 0 \\ u(x, 0) = 0 & x \in R \end{cases}$$

$$u_2 = \Gamma_{R^2} g$$

Consideriamo ora la funzione

$$u = u_1 + u_2$$

Questa verifica

$$\begin{cases} (\partial_t - \partial_{xx})u = (\partial_t - \partial_{xx})u_1 + (\partial_t - \partial_{xx})u_2 = g & x \in R \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f & x \in R \end{cases}$$

Quindi  $u$  e' soluzione del problema completo, e si rappresenta

$$u = \Gamma_R f + \Gamma_{R^2} g$$

## 2. DISTRIBUZIONI

nei conti precedenti avevamo degli integrali, applicati a funzioni  $g \in C_0^\infty$ . Nel caso piu semplice possibile possiamo schematizzare questi integrali nella forma:

$$\int \Gamma(y)g(y)dy.$$

Ci interessa quindi studiare questo tipo di integrali

Ricordo che una funzione e' semplicemente una relazione che ad ogni elemento di uno spazio vettoriale, (per esempio  $R^n$ ) associa un numero reale. Un esempio sono le funzioni lineari. Si fissa un vettore  $v$  e si ha la funzione che ad ogni altro vettore  $w$  associa il prodotto scalare di  $v$  e  $w$

$$w \rightarrow \langle v, w \rangle \in R$$

Cerchiamo di fare un cosa analoga, con i funzionali integrali, che vediamo nello stesso modo:

**Definition 2.** Sia  $f$  una funzione fissata e per ogni  $g \in C_0^\infty$  calcoliamo

$$g \rightarrow \int f(y)g(y)dy \in R$$

Se pensiamo che questo integrale associa ad ogni funzione  $g$  un numero reale, stiamo pensando ad una funzione da  $C_0^\infty$  a  $R$ . Non abbiamo quindi una funzione che opera su  $R^n$ , ma che opera a sua volta su funzioni in  $C_0^\infty$ . Questo oggetto si dice distribuzione di tipo funzione associata a  $f$ , e si indica con  $F_f$ .

$$F_f(g) = \int f(y)g(y)dy.$$

(si tratta solo di un modo per indicare l'integrale, e per sottolineare che opera sulle funzioni  $g$ )

Se pensiamo la distribuzione di tipo funzione come definita su  $C_0^\infty$ , allora e' lineare: infatti

$$\begin{aligned} F_f(g+h) &= \int f(y)(g(y)+h(y))dy = \\ &= \int f(y)g(y)dy + \int f(y)h(y)dy = F_f(g) + F_f(h) \end{aligned}$$

inoltre

$$F_f(\lambda g) = \int f(y)(\lambda g)(y)dy = \lambda \int f(y)g(y)dy = \lambda F_f(g)$$

**Definition 3.** Piu in generale si dira' distribuzione un funzionale lineare che opera sull'insieme  $C_0^\infty$

**Esempio 1.** Abbiamo visto che

$$\Gamma *_R g \rightarrow g \quad t \rightarrow 0$$

valutiamo queste funzioni nello 0.

$$\Gamma *_R g(0) = \int \Gamma(-y, t)g(y)dy = \int \Gamma(y, t)g(y)dy$$

Notiamo che questa e' la distribuzione di tipo funzione associata a  $\Gamma$  e valutata in  $g \in C_0^\infty$ . Siccome sappiamo che al limite per  $t \rightarrow 0$  si ottiene  $g$ , allora abbiamo:

$$F_\Gamma = \int \Gamma(y, t)g(y)dy \rightarrow g(0).$$

Tutte le distribuzioni di tipo funzione associata a  $\Gamma$ , sono lineari, e lo e' anche il secondo membro, che pero' non e' un integrale.

Diamo un nome alla distribuzione limite:

**Definition 4.** Si dice Delta di Dirac la distribuzione che a  $g$  associa  $g(0)$ , e si indica  $\delta$ :

$$\delta(g)$$

**Remark 4.** Una proprieta' cruciale delle funzioni a supporto compatto e' la seguente: per ogni funzione  $f \in C^1$ , e per ogni funzione  $g \in C_0^\infty$

$$\int f g' = - \int f' g$$

cioe' non c'e' il termine non integrato e' nullo nell'integrazione per parti

La proprieta' precedente e' caratterizzante, ovvero, se una funzione  $h$  gioca il ruolo di  $f'$  in quella formula, allora e' necessariamente  $f'$ :

**Proposition 3.** Sia  $f \in C^1$  fissata. Supponiamo che esista  $h$  continua e tale che

$$\int f g' = - \int h g$$

Allora  $h = f'$

**Proof** Infatti si ha per ipotesi

$$\int f g' = - \int h g$$

Per la proposizione precedente

$$\int f g' = - \int f' g$$

e quindi

$$\int (h - f')g = 0$$

Vogliamo dimostrare che questo implica che

$$h = f'.$$

Se per assurdo fossero diverse esisterebbe un punto  $x_0$  tale che

$$(h - f')(x_0) > 0$$

(il discorso e' identico se invece in questo punto la funzione e' negativa). Poiche' si tratta di funzioni continue esiste un intervallo  $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$  tale che



$$(h - f')(x) > 0 \quad \text{in } ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[.$$

Costruiamo ora una funzione  $g$  tale che

$$g = 0 \text{ se } x \notin ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \quad g > 0 \text{ se } x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

Allora integrando si ha

$$\int (h - f')g = \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} (h - f')g > 0$$

Che contraddice il fatto che l'integrale sia nullo, quindi  $h - f' = 0$ .

La definizione si puo' estendere a funzioni che verificano la stessa relazione integrale, e che magari non sono derivabili in senso puntuale:

**Definition 5.** Sia  $f \in L^1$  per ogni intervallo del tipo  $[-a, a]$ . Se esiste  $h \in L^1$  per ogni intervallo del tipo  $[-a, a]$  e tale che

$$\int fg' = - \int hg$$

Allora si dice che  $f$  e' derivabile in senso integrale e  $h = f'$

Notiamo che l'espressione  $\int hg$ , con  $g \in C_0^\infty$  e' una distribuzione di tipo funzione. Quindi nella definizione precedente possiamo anche accontentarci che  $\int hg$  sia una distribuzione

**Definition 6.** Sia  $f \in L^1$  per ogni intervallo del tipo  $[-a, a]$ . Se esiste una distribuzione  $H$  (non necessariamente di tipo funzione) tale che

$$\int fg' = -H(g)$$

Allora si dice che  $f$  e' derivabile in senso delle distribuzioni e  $f' = H$

**Esempio 2.** Calcoliamo la derivata del valore assoluto  $f(x) = |x|$ . La funzione non e' derivabile in senso puntuale, perche' ha uno spigolo in 0.

Proviamo a fare la derivata nel senso delle distribuzioni. Fissiamo  $g \in C_0^\infty$ , nulla fuori dell'intervallo  $]-a, a[$

$$\begin{aligned} \int f(y)g'(y)dy &= - \int_{-a}^0 yg'(y)dy + \int_0^a yg'(y)dy = \\ &= -[yg]_{-a}^0 + \int_{-a}^0 g(y)dy + [yg]_0^a - \int_0^a g(y)dy \end{aligned}$$

sempre considerando che  $g$  si annulla sul complementare di  $]-a, a[$

$$= \int_{-\infty}^0 g(y)dy - \int_0^{\infty} g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} hgdy$$

dove  $h(y) = \text{segn}(y)$ . Quindi la derivata del valore assoluto e' il segno, anche nel senso delle distribuzioni.

**Esempio 3.** Calcoliamo la derivata del gradino

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

La funzione non è derivabile in 0 perché ha una discontinuità di tipo salto.

Proviamo a fare la derivata nel senso delle distribuzioni. Fissiamo  $g \in C_0^\infty$ , nulla fuori dell'intervallo  $] - a, a[$

$$\int f(y)g'(y)dy = \int_0^a g'(y)dy = [g]_0^a = -g(0) = -\delta(g)$$

Quindi la derivata del gradino è la delta. Si noti che in presenza di una discontinuità di tipo salto, la derivata nel senso delle distribuzioni e puntuale possono essere diverse.

**Esempio 4.** Calcoliamo derivata della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ -1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

La funzione è uguale a quella dell'esercizio 3 con il segno cambiato, quindi  $f' = -\delta$ . In pratica la derivata di una discontinuità di tipo salto verso l'alto è una delta, la derivata del salto verso il basso è  $-\delta$ .

**Esempio 5.** Calcoliamo derivata della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

La funzione è uguale a quella dell'esercizio 3 con il moltiplicata per 2. Quindi  $f' = 2\delta$ . In pratica la derivata di una discontinuità di tipo salto verso l'alto è una delta moltiplicata per l'ampiezza del salto.

**Esempio 6.** Calcoliamo derivata della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$f' = -3\delta$ . In pratica la derivata di una discontinuità di tipo salto verso il basso è  $-\delta$  moltiplicata per l'ampiezza del salto.

**Esempio 7.** Calcoliamo derivata della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x & \text{se } x < 0 \\ x^2 + 5x + 3 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$f' = 2x + 5 + 3\delta$$

La derivata nel senso delle distribuzioni coincide con la distribuzione di tipo funzione associata alla derivata se la derivata esiste, ma come si vede nel caso del gradino, nei punti in cui la derivata non esiste, possono esserci distribuzioni non di tipo funzione, come la delta.

Negli integrali che ci interessano compare sempre la convoluzione, e quindi diamo una definizione di convoluzione nel senso delle distribuzioni. Cominciamo a convolvere due distribuzioni di tipo funzione,

**Proposition 4.** *Se  $f$  e  $h$  sono entrambe  $L^1$ , sappiamo che possiamo calcolarne la convoluzione*

$$h * f = \int h(y)f(x-y)dy$$

La distribuzione di tipo funzione associata alla convoluzione sara' allora:

$$F_{h*f}(g) = \int (h * f)(x)g(x)dx = \int \int h(y)f(x-y)g(x)dydx =$$

con il cambio di variabile  $z = x - y$

$$\int h(y) \left( \int f(z)g(z+y)dz \right) dy = F_h \left( \int f(z)g(z+y)dz \right)$$

**Definition 7.** *Se  $H$  e' una distribuzione e  $f$  una funzione, si dice convoluzione di  $H$  e  $f$  la distribuzione che ad ogni  $g \in C_0^\infty$  associa*

$$H \left( \int f(z)g(z+y)dz \right)$$

**Esempio 8.** *Proviamo che, se  $f$  e' una funzione, allora*

$$\delta * f = f.$$

infatti per la definizione precedente

$$(\delta * f)(g) = \delta \left( \int f(y+z)g(z)dz \right) = \int f(z)g(z)dz = F_f(g)$$

### 3. SOLUZIONI FONDAMENTALI E DELTA DI DIRAC

**Proposition 5.** *La funzione  $\Gamma$  verifica*

$$\left( \partial_t - \partial_{xx} \right) \Gamma = 0 \quad \text{puntualmente}$$

per  $t > 0$  non esiste per  $t = 0$ .

$$\left( \partial_t - \partial_{xx} \right) \Gamma = \delta \quad \text{nel senso delle distribuzioni}$$

La prima l'abbiamo gia' dimostrata. Per dimostrare la seconda calcoliamo  $\partial_t \Gamma$ . La derivata rispetto a  $t$  di  $\Gamma$  e' la distribuzione che a  $g$  associa

$$- \int \Gamma(y, \tau) \partial_\tau g(y, \tau) dy d\tau.$$

La derivata rispetto a  $x$  di  $\Gamma$  e' la distribuzione che a  $g$  associa

$$- \int \Gamma(y, \tau) \partial_y g(y, \tau) dy d\tau.$$

la derivata seconda rispetto a  $x$  e' la distribuzione

$$\int \Gamma(y, \tau) \partial_{yy} g(y, \tau) dy d\tau = H_3(g).$$

Mettendo insieme queste relazioni, a noi interessa  $\left( \partial_t - \partial_{xx} \right) \Gamma$  nel senso delle distribuzioni, questo sara' la distribuzione che a  $g$  associa

$$- \int \Gamma(y, \tau) \left( \partial_\tau - \partial_{yy} \right) g(y, \tau) dy d\tau.$$

Questo integrale si calcola esattamente come nella proposizione 2

$$= \int_R \int_R \left( -\partial_\tau - \partial_{yy} \right) g(y, \tau) \Gamma(y, \tau) dy d\tau =$$

Teniamo conto che  $\Gamma(y, \tau) = 0$  se  $\tau < 0$ , e che  $g$  ha supporto compatto, quindi  $g(y, \tau) = 0$  se  $|y| > a$ , oppure  $\tau > b$ , per due opportune costanti  $a, b$

$$= \int_0^b \int_{-a}^a \left( -\partial_\tau - \partial_{yy} \right) g(y, \tau) \Gamma(y, \tau) dy d\tau$$

per fare dei conti, occorre stare lontano dal punto 0.

$$u = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^b \int_{-a}^a \left( -\partial_\tau - \partial_{yy} \right) g(y, \tau) \Gamma(y, \tau) dy d\tau =$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} - \int_\epsilon^b \int_{-a}^a \partial_\tau g(y, \tau) \Gamma(y, \tau) dy d\tau - \int_\epsilon^b \int_{-a}^a \partial_{yy} g(y, \tau) \Gamma(y, \tau) dy d\tau$$

per parti

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} - \left[ \int_{-a}^a g(y, \tau) \Gamma(y, \tau) dy \right]_{t=\epsilon}^{t=b} + \\ & \int_\epsilon^b \int_{-a}^a g(y, \tau) \partial_\tau \Gamma(y, \tau) dy d\tau \\ & - \int_\epsilon^b \int_{-a}^a g(y, \tau) \partial_{yy} \Gamma(y, \tau) dy d\tau = \end{aligned}$$

Ora usiamo il fatto che

$$\partial_\tau \Gamma(y, \tau) - \partial_{yy} \Gamma(y, \tau) = 0,$$

e i due integrali si cancellano. Otteniamo

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} - \left[ \int_{-a}^a g(y, \tau) \Gamma(y, \tau) dy \right]_{t=\epsilon}^{t=b} =$$

(tenendo conto che  $g(b) = 0$ , ed e' nulla fuori da  $[-a, a]$  )

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_R g(y, \epsilon) \Gamma(y, \epsilon) dy = g(0, 0) = \delta(g)$$

La soluzione del problema del calore, con una sorgente e dato iniziale nullo risulta

$$u = \Gamma * g$$

Derivando si ottiene

$$\left( \partial_t - \partial_{xx} \right) u = \left( \partial_t - \partial_{xx} \right) \Gamma * g = \delta * g = g$$

## 4. L'OPERATORE DI LAPLACE

Determiniamo ora la soluzione fondamentale dell'operatore di Laplace. Vogliamo cercare soluzioni di

$$\Delta u = \sum_i \partial_{ii} u = g(x) \quad \text{in } R^n$$

(si noti che  $g$  non dipende dal tempo perche' il problema e' stazionario)

Se la soluzione non dipende da  $t$ , allora  $\partial_t u = 0$ , e quindi sommando all'equazione precedente

$$\left(\partial_t - \partial_{xx}\right)u = -g$$

Quindi una soluzione si trovera' nella forma:

$$u = -\Gamma_{calore} * g = - \int \int \Gamma_{calore}(y, t) d\tau g(x - y) dy$$

Allora chiamiamo soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace

$$\Gamma_{\Delta} = - \int \Gamma_{calore}(y, t) dt.$$

Calcoliamo esplicitamente questo integrale

$$\Gamma_{\Delta} = - \int \Gamma_{calore}(y, t) dt = - \int \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}} dt =$$

con il cambio di variabile  $t = \frac{|x|^2}{4s}$ ,  $dt = -\frac{|x|^2}{4s^2} ds$

$$- \int \frac{e^{s^2} s^{n/2-2}}{4\pi^{n/2} |x|^{(n-2)}} ds = -C \frac{1}{|x|^{n-2}}$$

if  $n \geq 3$ .

**Proposition 6.** *La funzione  $\Gamma_{\Delta}$  verifica*

$$\Delta \Gamma_{\Delta} = 0 \quad \text{puntuualmente}$$

per  $|x|$  diverso da 0. non esiste in 0.

$$\Delta \Gamma_{\Delta} = \delta \quad \text{nelsensodelledistribuzioni}$$

La prima e' una verifica diretta.

Proviamo la seconda. Si tratta di dimostrare che la distribuzione associata alla derivata seconda rispetto a  $x$  e'  $\delta$ . Ovvero

$$\int \Gamma_{\Delta}(y) \Delta g(y) dy = \delta(g) = g(0)$$

Consideriamo l'integrale. Per definizione di  $\Gamma_{\Delta}$  si ha

$$\int \Gamma_{\Delta}(y) \Delta g(y) dy = - \int \int_0^{\infty} \Gamma_{calore}(y, t) dt \Delta g(y) dy =$$

come sempre eliminiamo un intorno di 0

$$- \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \int_{\epsilon}^{\infty} \Gamma_{calore}(y, t) dt \Delta g(y) dy =$$

integrando per parti rispetto a  $y$

$$-\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\infty} \Delta \Gamma_{calore}(y, t) dt g(y) dy =$$

Poiche' la soluzione fondamentale dell'equazione del calore verifica  $\Delta \Gamma_{calore} = \partial_t \Gamma_{calore}$

$$\begin{aligned} & -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\infty} \partial_t \Gamma_{calore}(y, t) dt g(y) dy = \\ & = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\epsilon}^{\infty} \partial_t \Gamma_{calore}(y, t) g(y) dy \right]_{\epsilon}^{\infty} = \\ & = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\infty} \Gamma_{calore}(y, \epsilon) g(y) dy = g(0). \end{aligned}$$

## 5. LA SOLUZIONE FONDAMENTALE PER OPERATORI ELLITTICI O PARABOLICI

Questa proprieta' si puo' generalizzare a qualunque operatore Una soluzione fondamentale di un operatore  $L$ , ellittico, o parabolico sara' una funzione  $\Gamma$  tale che

$$L\Gamma = \delta.$$

Allora la soluzione del problema

$$Lu = g$$

si scrive

$$u = \Gamma * g$$

Infatti derivando si ottiene

$$Lu = L\Gamma * g = \delta * g = g$$