1. Trasformata di Laplace

Definizione 1.1. *Si dice che esiste la trasformata di Laplace di una funzione f se esiste finito*

$$\int_0^\infty |e^{-st} f(t)| dt$$

Allora esiste anche

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

E si dice trasformata di Laplace della funzione f.

Osservazione 1.1. *Se esiste $\mathcal{L}(f)(s)$, allora per ogni S_1 tale che $Re(s_1) > Re(s)$ esiste anche $\mathcal{L}(f)(s_1)$. Si pone allora ascissa di convergenza della funzione f*

$$\sigma(f) = min\{Re(s) : esiste \mathcal{L}(f)(s)\}$$

Osservazione 1.2. *La trasformata di Laplace e' lineare. Questo significa che, se f e' g sono Laplace-trasformabili, anche $f + g$ e' Laplace- trasformabile e*

$$\mathcal{L}(f + g)(s) = \mathcal{L}(f)(s) + \mathcal{L}(g)(s)$$

per $Re(s) > max(\sigma(f), \sigma(g))$ Inoltre se c e' un numero reale cf e' Laplace trasformabile e

$$\mathcal{L}(cf)(s) = c\mathcal{L}(f)(s)$$

Esempio 1.1.

$$\text{Sia } f(t) = 1 \quad \text{allora la sua trasformata di Laplace e' } \mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s}$$

Infatti

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = [\frac{e^{-st}}{-s}]_0^{+\infty} = \frac{1}{s}.$$

Esempio 1.2.

$$\text{Sia } f(t) = e^{at} \quad \text{allora la sua trasformata di Laplace e' } \mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s-a}$$

Di nuovo si tratta di una verifica diretta:

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} dt = [\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}]_0^{+\infty} = \frac{1}{s-a}.$$

Esempio 1.3.

$$\text{Sia } f(t) = e^{i\omega t} \quad \text{allora la sua trasformata di Laplace e' } \mathcal{L}(f)(s) = \frac{s+i\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-(s-i\omega)t} dt = [\frac{e^{-(s-i\omega)t}}{-(s-a)}]_0^{+\infty} = \frac{1}{s-i\omega} = \frac{s+i\omega}{s^2+\omega^2}.$$

Esempio 1.4.

$$\text{Sia } f(t) = \sin(\omega t) \quad \text{allora la sua trasformata di Laplace e' } \mathcal{L}(f)(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\text{Sia } f(t) = \cos(\omega t) \quad \text{allora la sua trasformata di Laplace e' } \mathcal{L}(f)(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

Basta infatti rappresentare seno e coseno in termini della funzione esponenziale

Per la proposizione precedente

$$\mathcal{L}(e^{i\omega t})(s) = \frac{s + i\omega}{s^2 + \omega^2}$$

quindi

$$\mathcal{L}(e^{-i\omega t})(s) = \frac{s - i\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Sommando si ottiene

$$\mathcal{L}(\cos(\omega t)) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Sottraendo

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t)) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Esempio 1.5. *Trasformata di Laplace dei polinomi*
Abbiamo gia' dimostrato che

$$\int e^{-ts} dt = \mathcal{L}(1)(s) = \frac{1}{s}$$

Derivando entrambi i membri si ottiene

$$\frac{d}{ds} \int e^{-ts} dt = \int (-t) e^{-ts} dt = -\frac{1}{s^2}$$

Pertanto

$$\mathcal{L}(t)(s) = \frac{1}{s^2}$$

Rideriviamo

$$\frac{d}{ds} \int (-t) e^{-ts} dt = \int (-t)^2 e^{-ts} dt = 2\frac{1}{s^3}$$

Ovvero

$$\mathcal{L}(t^2)(s) = \frac{2}{s^3}$$

Iterando si ottiene

$$\mathcal{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Proprieta' della trasformate Sia f una funzione Laplace trasformabile nulla per $t < 0$ con ascissa di convergenza $\sigma(f)$ Allora si ha

- $\mathcal{L}(f(ct)) = \frac{1}{c}\mathcal{L}(f)(\frac{s}{c}) \quad c > 0, Re(s) > c\sigma(f)$
- $\mathcal{L}(f(t - t_0)) = e^{-t_0 s}\mathcal{L}(f)(s) \quad t_0 > 0 Re(s) > \sigma(f)$
- $\mathcal{L}(e^{at} f) = \mathcal{L}(f)(s - a) \quad a \in C, Re(s) > Re(a)\sigma(f)$

Proof
Proviamo la prima

$$\mathcal{L}(f(ct)) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(ct) dt =$$

(con il cambio di variabile $ct = \tau$)

$$= \frac{1}{c} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{s\tau}{c}} f(\tau) d\tau = \frac{1}{c}\mathcal{L}(f)(\frac{s}{c})$$

Proviamo la seconda. In questo caso risulta importante che la funzione f sia negativa per $t < 0$. Fissiamo $t_0 > 0$

$$\mathcal{L}(f(t-t_0))(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t-t_0)dt =$$

(con il cambio di variabile $t - t_0 = \tau$)

$$= \int_{-t_0}^{+\infty} e^{-s(\tau+t_0)} f(\tau)d\tau$$

Poiche' f e' negativa per $\tau < 0$

$$= e^{-st_0} \int_0^{+\infty} e^{-s\tau} f(\tau)d\tau$$

Omettiamo la prova della terza che e' analoga.

Proposizione 1.1. *Sia f una funzione continua per $t > 0$, derivabile con derivata prima continua a tratti, e Laplace - trasformabile. Allora per ogni s con $Re(s) > max\sigma(f), \sigma(f')$, si ha*

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0).$$

Proof

$$\mathcal{L}(f')(s) = \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st}dt =$$

$$[f(t)e^{-st}]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

(integriamo per parti, tenendo conto che f e' trasformabile con Laplace,e quindi $lim_{t\to+\infty} e^{-st} f(t) = 0$)

$$s\mathcal{L}(f)(s) - f(0).$$

Iterando la proposizione precedente si ottiene

Proposizione 1.2. *Sia f una funzione continua per $t > 0$, derivabile con derivata prima e seconda continua a tratti, e Laplace - trasformabile. Allora per ogni s con $Re(s) > max\sigma(f), \sigma(f'), \sigma(f'')$, si ha*

$$\mathcal{L}(f'')(s) = s^2\mathcal{L}(f)(s) - f'(0) - sf(0).$$

Proof

$$\mathcal{L}(f'')(s) = s\mathcal{L}(f')(s) - f'(0) =$$

riapplicando il teorema precedente

$$= s(s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)) - f'(0)$$

Proposizione 1.3. *Sia f una funzione continua per $t > 0$, e Laplace - trasformabile. Allora per ogni s con $Re(s) > max\sigma(f)$, si ha*

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(-tf)(s).$$

(osserviamo che non sono necessarie ipotesi su tf , a differenza che nella trasformata di Fourier.)

Proof Fissiamo $Re(s) > max\sigma(f)$

$$\frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt =$$

(derivando formalmente sotto il segno di integrale)

$$\frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)e^{-st}(-t)dt$$

che e' la tesi.

Verifichiamo ora che la derivazione sotto il segno di integrale e' lecita
1) $f(t)e^{-st} \in L^1$
2) Esiste $\frac{d}{ds}(f(t)e^{-st}) = (-t)f(t)e^{-st}$
3) Per verificare l'ultima affermazione fissiamo s_1 tale che $\sigma < s_2 < s_1 < s$

$$sup_{s>s_1}|(-t)f(t)e^{-st}| < |(-t)f(t)e^{-s_1t}| < max_t|(-t)e^{-((s_1-s_2)t}|f(t)e^{-s_2t}| \in L^1$$

Iterando si ottiene

Proposizione 1.4. *Sia f una funzione continua per $t > 0$, e Laplace - trasformabile. Allora per ogni s con $Re(s) > max\sigma(f)$, si ha*

$$\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}((-t)^n f)(s).$$

Proposizione 1.5. *Siano f g funzioni continue per $t > 0$, e Laplace - trasformabili. Allora per ogni s con $Re(s) > max\sigma(f), \sigma(g)$, si ha*

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)(s).$$

Osservazione 1.3. *Abbiamo gia' osservato che la funzione e^{-t^2} non ammette primitiva in termini di funzioni elementari. Introduciamo quindi la sua funzione primitiva e la indichiamo funzione di errore*

$$erf(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^t e^{-\tau^2}d\tau$$

Questa normalizzazione viene scelta, perche' si tratta di una funzione che si annulla in 0, e tende ad 1 quando $t \to +\infty$

Calcoliamo ora alcune trasformate che ci saranno utili nel seguito

Esempio 1.6.
- $\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}\Big) = 1 - erf\Big(\frac{a}{2\sqrt{t}}\Big).$
- $\mathcal{L}^{-1}\Big(e^{-a\sqrt{s}}\Big)(t) = \frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{a^2}{4t}}.$
- $\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}\Big)(t) = \frac{a}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{a^2}{4t}}.$

Omettiamo la prova della prima antitrasformata, e deduciamo le altre due dalla prima.

$$e^{-a\sqrt{s}} = s\mathcal{L}\Big(1 - erf\Big(\frac{a}{2\sqrt{t}}\Big)\Big)(s) = \mathcal{L}\Big(-\frac{d}{dt}erf\Big(\frac{a}{2\sqrt{t}}\Big)\Big)(s) = \mathcal{L}\Big(\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{a^2}{4t}}\Big)(s)$$

Derivando entrambi i membri si ottiene l'ultima

$$\frac{d}{ds}e^{-a\sqrt{s}} = \frac{d}{ds}\mathcal{L}\Big(\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{a^2}{4t}}\Big)$$

esplicitiamo le derivate, e applichiamo la derivata della trasformata al secondo membro:

$$-\frac{a}{\sqrt{s}}e^{-a\sqrt{s}} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\Big(\frac{a}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{a^2}{4t}}\Big)$$

Da qui la terza affermazione segue subito, dividend per $-a$.

Esempio 1.7.

Il metodo dei fratti semplici per l'antitrasformata di Laplace

Esempio 1.8. *Calcolare l'antitrasformata di Laplace della funzione seguente:*

$$\frac{1}{s(1-s)}$$

Rappresentiamo la frazione come somma di fratti semplici:

$$\frac{1}{s(1-s)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{1-s} =$$

riducendo alla stesso denominatore

$$\frac{A(1-s)+Bs}{s(1-s)}$$

La frazione e' uguale a quella iniziale se

$$A = 1, -A + B = 0,$$

quindi

$$\frac{1}{s(1+s^2)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} = \mathcal{L}(1)(s) - \mathcal{L}(e^t)(s)$$

Quindi abbiamo ottenuto l'antitrasformata:

$$\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{s(1-s)}\Big) = (1-e^t)(s)$$

Esempio 1.9. *Calcolare l'antitrasformata di Laplace della funzione seguente:*

$$\frac{1}{s(1+s^2)}$$

Rappresentiamo la frazione come somma di fratti semplici:

$$\frac{1}{s(1+s^2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{1+s^2} =$$

riducendo alla stesso denominatore

$$\frac{A(1+s^2)+(Bs^2+Cs)}{s(1+s^2)}$$

La frazione e' uguale a quella iniziale se

$$A = 1, A + B = 0, C = 0,$$

quindi

$$\frac{1}{s(1+s^2)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{1+s^2} = \mathcal{L}(1)(s) - \mathcal{L}(cos(t))(s)$$

Quindi abbiamo ottenuto l'antitrasformata:

$$\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{s(1+s^2)}\Big) = (1-cos(t))(s)$$

Esempio 1.10. *In generale, il denominatore si fattorizza in prodotto di primo grado oppure di secondo grado irriducibili. Quindi ogni frazione razionale sara' del tipo seguente*

$$\frac{p(t)}{(t-a_1)^{m_1}(t-a_2)^{m_2}\cdots(t^2+b_1t+c_1)^{n_1}(t^2+b_1t+c_1)^{n_1}\cdots}$$

La fattorizzazione e' del tipo seguente:

$$\frac{p(t)}{(t-a_1)^{m_1}(t-a_2)^{m_2}\cdots(t^2+b_1t+c_1)^{n_1}(t^2+b_1t+c_1)^{n_1}\cdots}=$$

$$\frac{A_{11}}{t-a_1}+\frac{A_{12}}{(t-a_1)^2}+\cdots\frac{A_{1m_1}}{(t-a_1)^{m_1}}+\cdots$$

$$+\frac{B_{11}+tC_{11}}{t^2+b_1t+c_1}+\frac{B_{12}+tC_{12}}{(t^2+b_1t+c_1)^2}+\cdots\frac{B_{1m_1}+tC_{1m_1}}{(t^2+b_1t+c_1)^{n_1}}+\cdots$$

Esercizio 1.1. *Calcolare l'antitrasformata di Laplace delle funzioni seguenti:*

$$\frac{1}{s^2-3s-2},\quad \frac{s}{s^2-5s-6},\quad \frac{s}{(s-2)(s^2-5)}.$$

Esercizio 1.2. *Calcolare l'antitrasformata di Laplace delle funzioni seguenti:*

$$\frac{1}{(s-4)^3},\quad \frac{1}{(s+2)^2+4},\quad \frac{e^{-2s}}{s^3}$$

1.1. La trasformata di Laplace per la soluzione di equazioni differenziali a derivate parziali.

Esempio 1.11. *Determinare la soluzione del problema*

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx} \quad x>0, t>0 \\ u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=f(t),\ lim_{x\to+\infty}u(x,t)=0 \end{cases}$$

Applichiamo la trasformata di Laplace, antitrasformando nella variabile t, e poniamo $\mathcal{L}(u)=U$

$$s^2U=U_{xx} \quad x>0, t>0$$

$$U(0,s)=\mathcal{L}(f)(s),\ lim_{x\to+\infty}U(x,s)=0$$

Adesso pensiamo U come funzione della sola variabile x, e risolviamo l'equazione Si tratta di un'equazione del secondo ordine a coefficienti costanti, La soluzione sara' quindi

$$U(x)=C_1e^{sx}+C_2e^{-sx}$$

Imponiamo le condizioni iniziali. Imponendo la condizione

$$lim_{x\to+\infty}U(x,s)=0,$$

la soluzione diviene:

$$U(x)=C_2e^{-sx}$$

Imponiamo l'altra condizione $U(0,s)=\mathcal{L}(f)(s)$ Si ottiene

$$U(0)=C_2=\mathcal{L}(f)(s)$$

Quindi la soluzione sara'

$$U(x,s)=\mathcal{L}(f)(s)e^{-sx}=\mathcal{L}(f(t-x)(s)$$

Antitrasformando

$$u(x,t) = f(t-x) \text{ se } t-x>0, \quad u(x,t) = 0 \text{ se } t-x<0,$$

Esempio 1.12.

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + t + 2 \quad x>0, t>0 \\ u(x,0) = -2 \\ u(0,t) = \cos(2t), \quad u \text{ limitata per } x \to +\infty \end{cases}$$

Trasformiamo l'equazione, e indichiamo U la trasformata:

$$sU(s) - u(x,0) = \frac{1}{9}U_{xx} + \mathcal{L}(t+2)(s) = \frac{1}{9}U_{xx} + \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s} \quad x>0, t>0$$

dove $-u(x,0) = 2$

$$U(0,s) = \mathcal{L}(\cos(2t))(s) = \frac{s}{s^2+4}$$

Abbiamo ottenuto l'equazione differenziale per U:

$$\frac{1}{9}U_{xx} = sU(s) + 2 - \mathcal{L}(t+2)(s) \quad x>0, t>0$$

Si tratta di equazione differenziale del secondo ordine (nella sola variabile x) del secondo ordine non omogenea a coefficienti costanti. Scriviamo l'omogenea:

$$\frac{1}{9}U_{xx} = sU(s)$$

Il polinomio caratteristico ha radici $\pm\sqrt{9s}$ *e quindi la soluzione dell'omogenea sara'*

$$U(x) = C_1 e^{3\sqrt{s}x} + C_2 e^{-3\sqrt{s}x}.$$

Cerchiamo una soluzione della non omogenea. Ricordo che la variabile di integrazione e' x. Quindi il secondo membro e' costante, e una soluzione sara' della forma:

$$U(x) = A$$

Sostituiamo nell'equazione non omogenea:

$$0 = sA + 2 - \mathcal{L}(t+2)(s) \quad x>0, t>0$$

e otteniamo

$$A = \frac{\mathcal{L}(t+2)(s) - 2}{s} = \mathcal{L}\Big(\frac{t^2}{2} + 2t - 2\Big)(s)$$

Quindi la soluzione della non omogenea risulta

$$U(x) = C_1 e^{3\sqrt{s}x} + C_2 e^{-3\sqrt{s}x} + \mathcal{L}\Big(\frac{t^2}{2} + 2t - 2\Big)(s).$$

Pero' la funzione deve essere limitata quindi $C_1 = 0$ *Imponiamo la condizione* $U(0,s) = \mathcal{L}(\cos(2t))(s)$

$$U(0) = C_2 + \mathcal{L}\Big(\frac{t^2}{2} + 2t - 2\Big)(s) = \mathcal{L}(\cos(2t))(s).$$

quindi

$$C_2 = -\mathcal{L}\Big(\frac{t^2}{2} + 2t - 2\Big)(s) + \mathcal{L}(\cos(2t))(s)$$

In definitiva

$$U(x) = \mathcal{L}\Big(2 - \frac{t^2}{2} - 2t + \cos(2t)\Big)(s)e^{-3\sqrt{s}x} + \mathcal{L}\Big(\frac{t^2}{2} + 2t - 2\Big)(s).$$

poiche '

$$\mathcal{L}^{-1}\Big(e^{-3x\sqrt{s}}\Big)(t) = \frac{3x}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{9x^2}{4t}},$$

si ottiene

$$U(x) = \mathcal{L}\Big(2 - \frac{t^2}{2} - 2t + \cos(2t)\Big)(s) \frac{3x}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{9x^2}{4t}} + \mathcal{L}\Big(\frac{t^2}{2} + 2t - 2\Big)(s) =$$

$$= \mathcal{L}\Big(2 - \frac{t^2}{2} - 2t + \cos(2t)\Big) * \Big(\frac{3x}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{9x^2}{4t}}\Big)(s) + \mathcal{L}\Big(\frac{t^2}{2} + 2t - 2\Big)(s) = .$$

e quindi

$$u = \Big(2 - \frac{t^2}{2} - 2t + \cos(2t)\Big) * \Big(\frac{3x}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{9x^2}{4t}}\Big) + \frac{t^2}{2} + 2t - 2.$$

Risolvere i seguenti problemi

$$\begin{cases} u_{tt} = 3u_{xx} \quad x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = f(t),\ lim_{x\to+\infty} u(x,t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt} + 2u_t + u = u_{xx} \quad x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = f(t),\ lim_{x\to+\infty} u(x,t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt} + 6u_t + 9u = 5u_{xx} \quad x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = f(t),\ lim_{x\to+\infty} u(x,t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t = 5u_{xx} + t^2 \quad x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = 6 \\ u(0,t) = e^{-t}, \quad u \ limitata \ per \ x \to +\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + (t+6) \quad x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = 4 \\ u(0,t) = cos(t), \quad u \ limitata \ per \ x \to +\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} - 3t \quad x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = 3 \\ u(0,t) = t^2 + 4, \quad u \ limitata \ per \ x \to +\infty \end{cases}$$