Risolvere i seguenti problemi,
utilizzando il metodo di separazione di variabili
e le serie di Fourier:

- determinare la soluzione del seguente problema sul disco di raggio 2:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad r < 2 \\ u(2,\theta) = \sin(\theta) + 5\cos(\theta), \quad r = 2 \end{cases}$$

- determinare la soluzione del seguente problema di Dirichlet, sul disco unitario:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad r < 1 \\ u(1,\theta) = y + x^2 \quad r = 1 \end{cases}$$

- determinare la soluzione del seguente problema di Dirichlet, sul rettangolo:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad (x,y) \in]0,1[\times]0,4[\\ u(x,0) = u(x,4) = 0,\ x \in]0,1[\\ u(0,y) = 0,\ u(1,y) = \sin(4\pi y) + 3\sin(9\pi y), \quad y \in]0,4[\end{cases}$$

- determinare la soluzione del seguente problema di Dirichlet, sul rettangolo:

$$\begin{cases} \partial_{xx}u + \partial_{yy}u + 2\partial_y u = 0 \quad (x,y) \in]0,1[\times]0,1[\\ u(0,y) = u(1,y) = 0,\ y \in]0,1[\\ u(x,0) = 0,\ u(x,1) = 7\sin(6\pi x) + \sin(8\pi x), \quad x \in]0,1[\end{cases}$$

- determinare la soluzione del seguente problema ai valori iniziali:

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_{xx}u, \quad 0 < x < 4,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(4,t) = 0,\ t > 0 \\ u(x,0) = sin(4\pi x) + 8\sin(\pi x), \quad x \in]0,4[\end{cases}$$

- determinare la soluzione del seguente problema ai valori iniziali:

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_{xx}u + \partial_x u, \quad 0 < x < 2,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(2,t) = 0,\ t > 0 \\ u(x,0) = e^{-x/2}\sin(\pi x), \quad x \in]0,2[\end{cases}$$

- determinare la soluzione del seguente problema ai valori iniziali:

$$\begin{cases} \partial_{tt}u = \partial_{xx}u, \quad 0 < x < 3, \ t > 0 \\ u(0,t) = u(3,t) = 0, \ t > 0 \\ u(x,0) = sin(3\pi x) + 7\sin(2\pi x), \quad x \in]0,3[\\ \partial_t u(x,0) = sin(2\pi x), \quad x \in]0,3[\end{cases}$$

- determinare la soluzione del seguente problema ai valori iniziali:

$$\begin{cases} \partial_{tt}u = \partial_{xx}u + 3\partial_x u, \quad 0 < x < 1, \ t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \ t > 0 \\ u(x,0) = e^{-\frac{3x}{2}} sin(\pi x), \quad x \in]0,1[\\ \partial_t u(x,0) = e^{-\frac{3x}{2}} sin(3\pi x), \quad x \in]0,1[\end{cases}$$