1. Esercizi

Esercizio 1 Provare che, se Ω e' un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$, allora esiste

$$\lim_{r \to 0} \frac{2n}{r^2}\Big(u(x) - \fint_{\partial B(x,r)} u(y)d\sigma(y)\Big) = -\Delta u(x)$$

Esercizio 2 Se Ω e' un aperto di $\mathbb{R}^n$, una funzione continua $u : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice superarmonica in Ω se per ogni $r > 0$ tale che $\overline{B(x,r)} \subset \Omega$ e per ogni funzione v armonica in $B(x,r)$, e coincidente con u sulla frontiera di $B(x,r)$ si ha $u \geq v$. Provare le affermazioni seguenti:

- Se u e' superarmonica in Ω, allora per ogni sfera $\overline{B(x,r)} \subset \Omega$ e per ogni $z \in \overline{B(x,r)}$ si ha
$$u(z) \geq \int_{\partial B(x,r)} K(z,y)u(y)d\sigma(y)$$
dove K e' il nucleo di Poisson del cerchio.
- Se u e' superarmonica in Ω, allora per ogni sfera $\overline{B(x,r)} \subset \Omega$ si ha $u(x) \geq \fint_{\partial B(x,r)} u(y)dy$
- Se u e' superarmonica in Ω, allora per ogni sfera $\overline{B(x,r)} \subset \Omega$ si ha $u(x) \geq \fint_{B(x,r)} u(y)dy$
- Se u e' di classe C^2, e' superarmonica in Ω, se e solo se $\Delta u \leq 0$
- Se u e' superarmonica soddisfa il principio di massimo forte
- Se u e' armonica allora u e' anche superarmonica
- Se u v sono superarmoniche $\min(u,v)$ e' superarmonica

Esercizio 3 Sia $\overline{B}(0,1)$ sottinsieme di $\mathbb{R}^n$. Sia $u \in C^2(B(0,1),\mathbb{R}) \cap C(\overline{B}(0,1),\mathbb{R})$ soluzione di

$$-\Delta u = f \in C^2(B(0,1),\mathbb{R}) \cap C(\overline{B}(0,1),\mathbb{R}) \text{ in } \Omega, \quad u = g \in C(\partial B(0,1),\mathbb{R}) \text{ su } \partial B(0,1)$$

Provare che esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\max_{B(0,1)} |u| \leq C(\max_{\partial B(0,1)} |g| + \max_{B(0,1)} |f|)$$

Esercizio 4 Sia $\Omega =]0,1[^2$. Provare che Ω verifica la proprieta' della sfera esterna.

Esercizio 5 Sia $\Omega =]-1,1[^2 -]0,1[^2$. Provare che Ω non verifica la proprieta' della sfera esterna.

Esercizio 6 Sia $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 3y^2 < z < 4\}$. Allora il seguente problema di Dirichlet ha soluzione unica:

$$\Delta u = f \in C^2(\bar{\Omega},\mathbb{R}) \cap C(\bar{\Omega},\mathbb{R}) \quad u_{|\Omega} = g \in C(\partial\Omega,\mathbb{R}).$$

Esercizio 7 Indicati (x,y) gli elementi di $\mathbb{R}^2$, consideriamo l'operatore $L = \partial_{xx} u$. Provare che in ogni punto della frontiera dell'insieme seguente, e' possibile determinare una barriera per l'operatore L:

$$\{(x,y) \in R^2 : -1 < x + y < 1, \ -1 < x - y < 1\}$$