1. Esercizi

Esercizio 1

Scrivere una formula di rappresentazione esplicita per le soluzioni del problema di Cauchy

$$\partial_t u = a\partial_{xx} u + bu_x + cu,\ x \in \mathbb{R},\ \ t > 0 \qquad u(x,0) = g(x)\, x \in \mathbb{R}$$

dove a, b, c sono coefficienti costanti.

Provare che, se $c < 0$ e g e' limitata allora $u(x,t) \to 0$ as $t \to +\infty$ (Hint: si scelga h, k tali che $v(x,t) = u(x,t)e^{hx+kt}$ e' soluzione dell'equazione del calore

Esercizio 2

Sia $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione continua e limitata. Trovare una formula per la soluzione del seguente problema:

$$\partial_t u = a\partial_{xx} u,\ x > 0,\ \ t > 0, \qquad u(x,0) = g(x)\, x > 0, \qquad u(0,t) = 0\, t > 0.$$

(Hint: estendere il dato iniziale in modo dispari e usare la formula per il problema di Cauchy globale)

Esercizio 3

Sia

$$\Gamma = \frac{e^{\frac{-|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}}$$

la soluzione fondamentale dell'equazione del calore in $R^n \times]0, \infty[$, e sia L l'operatore del calore.

Indicare $U((x,t), R)$ un insieme di livello della soluzione fondamentale

$$U((x,t), R) = \{(x,t) : \frac{1}{\Gamma(x,t)} \leq R^{N-2}\}, \quad N = n+2$$

Provare che,

$$lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial U((x,t),\epsilon)} < \nabla\Gamma(x-y, t-\tau), \nu(y) > d\sigma(y,\tau) = -1$$

Hint: applicare la condizione i) con una funzione $\phi \in C_0^\infty$ che sia identicamente uguale ad 1 in un intorno di (x,t), e quindi su ogni sfera $U((x,t)\epsilon)$, con ϵ piccolo. Poi integrare per parti

Esercizio 4

Provare la seguente formula di rappresentazione per funzioni regolari sugli insiemi di livello della soluzione fondamentale

$$u(x,t) = -\int_{\partial U((x,t),R)} \partial_{x_i}\Gamma(x-y, t-y)\nu_i(y,\tau)u(y,\tau)d\sigma(y,\tau) +$$

$$+ \int_{U((x,t),R)} \Big(\Gamma(x-y, t-y) - \frac{1}{R^{N-2}}\Big) Lu(y,\tau)dyd\tau$$

Esercizio 5

Dedurre la seguente formula di media per soluzioni di classe C^2 dell'equazione $Lu = 0$

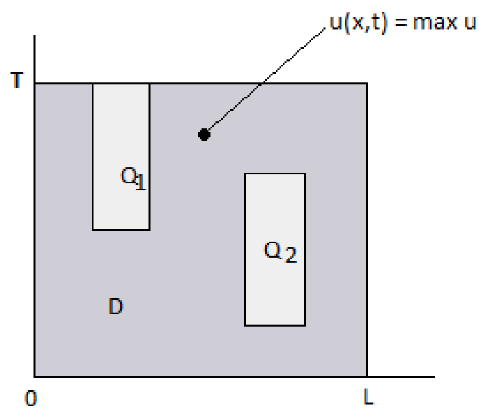

FIGURE 1. figura 1

$$u(x,t) = \int_{U((x,t),R)} \frac{|\nabla\Gamma(x-y,t-\tau)|^2}{\Gamma^2(x-y,t-\tau)} u(y,\tau)dyd\tau =$$
$$= \frac{1}{4r^n} \int_{U((x,t),R)} \frac{|x-y|^2}{t-\tau|^2} u(y,\tau)dyd\tau$$

Esercizio 6

Si dice che $u \in C^2_x(\Omega\times]0,T]$ e' sottosoluzione dell'equazione del calore se

$$u_t \leq \Delta u \quad in]0,T]$$

Provare che una sottosoluzione verifica la seguente diseguaglianza

$$u(x,t) \leq \int_{U((x,t),R)} \frac{|\nabla\Gamma(x-y,t-\tau)|^2}{\Gamma^2(x-y,t-\tau)} u(y,\tau)d\sigma(y,\tau)$$

verificare inoltre il principio di massimo forte per le sottosoluzioni.

Esercizio 7

Sia u una soluzione dell'equazione del calore in un rettangolo $D =]0,6[\times]0,6[-([1,2]\times[3,6]\cup[5,6]\times[1,4])$(si veda anche figura 1). Se u assume massimo nel punto $(3,5)$, qual e' l'insieme su cui u assume valore massimo?