ANNA BASCHETTI

es 1

Sia $L = \sum_{i,j} a_{ij} \partial^2_{ij} u$ dove (a_{ij}) è definita positiva.

Sappiamo che:

- L ha una soluzione fondamentale Γ t.c. $|\Gamma| \leq |x|^{-n+2}$, $|\partial_i \Gamma| \leq |x|^{-n+1}$, $|\partial_{ij}\Gamma| \leq |x|^{-n}$
- $$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \langle A \nabla\Gamma(y), \nu(y) \rangle_E \, d\sigma(y) = 1$$

dove $B(x,r) = \{ y : |\Gamma(x-y)|^{-1} \leq r^{n-2} \}$

Dedurre che per ogni funzione di classe C^2 in un aperto Ω e per ogni sfera inclusa in Ω

$$u(x) = \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \langle A\nabla\Gamma(x-y), \nu \rangle_E \, u(y) \, d\sigma(y) - \int_{B(x,\varepsilon)} \langle A \nabla \Gamma(x-y), \nabla u(y) \rangle_E \, dy$$

dim Prendiamo $x \in \Omega$ e una palla $\overline{B(x,\varepsilon)} \subseteq \Omega$.

Prendiamo $r \in \mathbb{R}$ t.c. $\overline{B(x,r)} \subset \overline{B(x,\varepsilon)}$

Sappiamo che

$$\int_{B(x,\varepsilon) \setminus B(x,r)} L\Gamma(x-y) \, u(y) \, dy = 0$$

perchè Γ soluz. fondamentale quindi lontano dal polo è nulla.

$$0 = \int_{B(x,\varepsilon) \setminus B(x,r)} \sum_{ij} a_{ij} \partial^2_{ij} \Gamma(x-y) \, u(y) \, dy$$

integro per parti con teorema della divergenza

$$= \sum_{ij} a_{ij} \Bigg(\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \partial_j \Gamma(x-y) \, \nu_{est\, B(x,\varepsilon)}(y) \, u(y) \, d\sigma(y) + \int_{\partial B(x,r)} \partial_j \Gamma(x-y) \, \nu_{est\, B(x,\varepsilon) \setminus B(x,r)}(y) \, u(y) \, d\sigma(y) - \int_{B(x,\varepsilon) \setminus B(x,r)} \partial_j \Gamma(x-y) \, \partial_i u(y) \, dy \Bigg) =: I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_1 = \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \sum_{ij} a_{ij} \; \partial_j \Gamma(x-y) \, \nu_{est} \, u(y) \, d\sigma(y) = \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \langle A \nabla \Gamma(x-y), \nu \rangle \, u(y) \, d\sigma(y)$$

$$I_2 = -\int_{\partial B(x,r)} \sum_{ij} a_{ij} \, \partial_j \Gamma(x-y) \, \nu_{est} \, u(y) \, d\sigma(y)$$

(Il segno è dovuto alla direzione della $\nu_{est \; B(x,\varepsilon)\setminus B(x,r)}$ che è opposto a quello di $\nu_{est \; B(x,\varepsilon)}$)

$$= -\int_{\partial B(x,r)} \langle A \nabla \Gamma(x-y), \nu \rangle \, u(y) \, d\sigma(y) \xrightarrow{r \to 0} -u(x)$$

Poichè per ipotesi

$$\lim_{r \to 0} \int_{\partial B(x,r)} \langle A \nabla \Gamma(y), \nu(y) \rangle \, d\sigma(y) = 1$$

e osservando che

$$u(x) = \frac{\int_{\partial B(x,r)} u(y) \, A \nabla \Gamma(x-y) \, \nu(y) \, d\sigma(y)}{\int_{\partial B(x,r)} A \nabla \Gamma(x-y) \, \nu(y) \, d\sigma(y)}$$

questo non è vero in generale. Occorre fare il lim per r che tende a 0

$$I_3 = -\int_{B(x,\varepsilon)\setminus B(x,r)} \sum_{ij} a_{ij} \, \partial_j \Gamma(x-y) \, \partial_i u(y) \, dy \xrightarrow{r \to 0} -\int_{B(x,\varepsilon)} \langle A \nabla \Gamma(x-y), \nabla u(y) \rangle \, dy$$

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$\Rightarrow u(x) = \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \langle A \nabla \Gamma(x-y), \nu \rangle \, u(y) \, d\sigma(y) - \int_{B(x,\varepsilon)} \langle A \nabla \Gamma(x-y), \nabla u(y) \rangle \, dy$$

$\square$

ANNA BASCHETTI

es 2

Sia $Lu = \Delta u + b\nabla u$, dove b è un vettore costante.
Se Ω è aperto, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ è soluzione di $Lu = 0$, provare che u assume massimo e minimo sulla frontiera di Ω.

dim Dimostriamo che se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $Lu > 0$

$$\Rightarrow \max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Sia $x_0 \in \overline{\Omega}$ punto di massimo.
Se $x_0 \in \partial\Omega$, allora è vero.
Se $x_0 \notin \partial\Omega$, allora $x_0 \in \Omega$.
Poichè x_0 pto di massimo, $\partial^2_{ij} u(x_0) \leq 0$ e $\nabla u(x_0) = 0$

$$\Rightarrow Lu(x_0) = \Delta u(x_0) + b\nabla u(x_0) = \Delta u(x_0) \leq 0$$

e questo contraddice l'ipotesi che $Lu > 0$.

$$\Rightarrow x_0 \in \partial\Omega.$$

Usiamo questo risultato per dimostrare il principio di massimo debole nel caso in cui $Lu = 0$, con L definito come sopra.
Definiamo la funzione

$$v = e^{x_1 \operatorname{sgn}(b_1)} - M$$ con $M = \text{cost}$ scelto in modo tale che $v < 0$.

Allora v è t.c. $\begin{cases} v < 0 & \text{in } \overline{\Omega} \\ Lv > 0 \end{cases}$

Allora v rispetta le ipotesi dell'osservazione precedente.
Prendiamo $\varepsilon > 0$ e perturbiamo u in modo che:

$$L(u + \varepsilon v) = Lu + \varepsilon Lv > 0.$$

Per l'osservazione precedente:

$$(u + \varepsilon v)(x) \leq \max_{\partial\Omega} (u + \varepsilon v) \quad \forall x \in \overline{\Omega}$$

$$\leq \max_{\partial\Omega} u \quad \text{poichè } v < 0.$$

$\forall x \in \overline{\Omega}$ $\quad u(x) + \varepsilon v(x) \leq \max_{\partial\Omega} u$
$\forall \varepsilon > 0$

x è fissato, mandiamo $\varepsilon \to 0$ e otteniamo:

$$u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Quindi u assume massimo sulla frontiera di Ω

Analogamente si dimostra che anche il minimo è assunto su $\partial\Omega$.

$\square$

ANNA BASCHETTI

es 3: Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ t.c. $\Delta u \geq 0$.

Se $\limsup_{|y| \to +\infty} u(y) \leq 0$ allora $\sup u \leq 0$.

dim: Se $u(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$ il teorema è vero.

Altrimenti $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n$ t.c. $u(x_0) > 0$.

Considero una palla $\overline{B(0,r)} \subseteq \mathbb{R}^n$ con r sufficiente-mente grande per cui $x_0 \in \overline{B(0,r)}$.

Per il teorema di Weierstrass, u assume massimo su $\overline{B(0,r)}$ poichè la palla è compatta.

Per il principio del massimo

$$\max_{\overline{B(0,r)}} u = \max_{\partial B(0,r)} u .$$

Considero allora una successione $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ crescente con $r_0 = r$ e costruisco $\forall n$ una palla $\overline{B(0,r_n)}$.

Per le considerazioni precedenti si ha:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \max_{\partial B(0,r_n)} u = \max_{B(0,r_n)} u \leq \max_{B(0,r_{n+1})} u = \max_{\partial B(0,r_{n+1})} u$$

Allora:

$$\sup_{\mathbb{R}^n} u \geq \max_{\partial B(0,r_n)} u \geq u(x_0) > 0 .$$

Passando all' inf:

occorreva fare $\sup_{|y|>0\; r\_n} u$

$$\limsup_{|y| \to \infty} u(y) > 0$$

il che contraddice l' ipotesi.

$\Rightarrow \sup u \leq 0$.

$\square$