Carla Dottori

ESERCIZIO 1

Sia $Lu = \sum_{ij} a_{ij} \partial^2_{ij} u$, dove (a_{ij}) è definita positiva

Sappiamo che:

- L ha soluzione fondamentale Γ tale che $|\Gamma| \leq |x|^{-n+2}$, $|\partial_i \Gamma| \leq |x|^{-n+1}$, $|\partial_{ij}\Gamma| \leq |x|^{-n}$
- $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} < A \nabla \Gamma(y), \nu(y) >_E d\sigma(y) = 1$

dove $B(x,r) = \{ y \mid |\Gamma(x-y)|^{-1} \leq r^{n-2} \}$

Dedurre che per ogni funzione di classe C^2 in un aperto Ω e per ogni sfera inclusa in Ω:

$$u(x) = \int_{\partial B(x,\varepsilon)} < A \nabla \Gamma(x-y), \nu >_E u(y)\, d\sigma(y) + \\ - \int_{B(x,\varepsilon)} < A \nabla \Gamma(x-y), \nabla u(y) >_E dy$$

SOLUZIONE:

Sia $x \in \Omega$ e $\overline{B(x,\varepsilon)} \subseteq \Omega$.
Sia $r \in \mathbb{R}^+$: $\overline{B(x,r)} \subseteq \overline{B(x,\varepsilon)}$

Dato che Γ è soluzione fondamentale

$$\int_{B(x,\varepsilon) \setminus B(x,r)} L\Gamma(x-y)\, u(y)\, dy = 0$$

Perché siamo fuori dal polo.

$$0 = \int_{B(x,\varepsilon) \setminus B(x,r)} \sum_{ij} a_{ij} \partial^2_{ij} \Gamma(x-y)\, u(y)\, dy$$

Integro per parti sfruttando il teorema della divergenza:

$$= \sum_{ij} a_{ij} \Big[\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \partial_i \Gamma(x-y)\, \nu_{\text{EST a } B(x,\varepsilon)}(y)\, u(y)\, d\sigma(y) +$$

$$+ \int_{\partial B(x,r)} \partial_i \Gamma(x-y)\, \nu_{\substack{\text{EST a} \\ B(x,\varepsilon)\setminus B(x,r)}}(y) \quad u(y)\, d\sigma(y) +$$

$$- \int_{B(x,\varepsilon)\setminus B(x,r)} \partial_i \Gamma(x-y)\, \partial_j u(y)\, dy \Big] = I_1 + I_2 + I_3$$

- $I_3 = - \int_{B(x,\varepsilon)\setminus B(x,r)} \sum_{ij} a_{ij}\, \partial_i \Gamma(x-y)\, \partial_j u(y)\, dy \xrightarrow{r \to 0}$

$$\to - \int_{B(x,\varepsilon)} < A \nabla \Gamma(x-y), \nabla u(y) > dy$$

- $I_2 = - \int_{\partial B(x,r)} \sum_{ij} a_{ij}\, \partial_i \Gamma(x-y)\, \nu_{EST}\, u(y)\, d\sigma(y)$

dove $\nu_{EST} = \nu_{\text{EST a } B(x,\varepsilon)}$, che ha segno opposto a $\nu_{\text{EST a } B(x,\varepsilon)\setminus B(x,r)}$, quindi ho un cambio di segno.

$$I_2 = - \int_{\partial B(x,r)} < A \nabla \Gamma(x-y), \nu > d\sigma(y) \xrightarrow{r \to 0} -u(x)$$

Vediamolo: consideriamo

$$\Big| \int_{\partial B(x,r)} \sum_{ij} a_{ij}\, \partial_i \Gamma(x-y)\, \nu(y)\, u(y)\, d\sigma(y) - u(x) \Big| =$$

$$\Big| \int_{\partial B(x,r)} \sum_{ij} a_{ij}\, \partial_i \Gamma(x-y)\, \nu(y)\, u(y)\, d\sigma(y) - \int_{\partial B(x,r)} \sum_{ij} a_{ij}$$

$$\partial_i \Gamma(x-y)\, \nu\, u(x)\, d\sigma(x) \Big|$$

$$\leq \int_{\partial B(x,r)} \Big| \sum_{ij} a_{ij} \partial_i \Gamma(x-y)\, \nu \Big|\, | u(y) - u(x) |\, d\sigma(y)$$

$$\leq \max_{y \in \partial B(x,r)} \underbrace{| u(y) - u(x) |}_{\substack{\downarrow r \to 0 \\ 0}} \underbrace{\int_{\partial B(x,r)} \sum_{ij} a_{ij} \partial_i \Gamma(x-y) . \nu\, d\sigma(y)}_{\substack{\downarrow r \to 0 \text{ per ipotesi} \\ 1}}$$

$$\xrightarrow{r \to 0} 0 \quad \text{ok}$$

• $I_1 = \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \sum_{ij} a_{ij}\, \partial_i \Gamma(x-y)\, \nu_{EST}\, u(y)\, d\sigma(y)$

$= \int_{\partial B(x,\varepsilon)} < A \nabla \Gamma(x-y), \nu > u(y)\, d\sigma(y)$

Sfruttando che $I_1 + I_2 + I_3 = 0$, ottengo la tesi:

$$u(x) = \int_{\partial B(x,\varepsilon)} < A \nabla \Gamma(x-y), \nu >_E u(y)\, d\sigma(y) +$$
$$- \int_{B(x,\varepsilon)} < A \nabla \Gamma(x-y), \nabla u(y) > dy$$

$\square$

ESERCIZIO 2

Sia $\mathcal{L}u = \Delta u + b\nabla u$, dove b è un vettore costante. Se Ω è aperto, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ è soluzione dell'equazione $\mathcal{L}u = 0$; provare che u assume massimo e minimo sulla frontiera.

SOLUZIONE:

Per prima cosa dimostriamo questo lemma:

LEMMA: Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $\mathcal{L}u > 0$, Ω aperto limitato $\Rightarrow \max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$

DIMOSTRAZIONE:

Sia $x_0 \in \bar{\Omega}$ punto di massimo ($\exists$ perché Ω limitato);

Abbiamo due casi:

1) $x_0 \in \partial\Omega \Rightarrow$ il teorema è verificato

2) $x_0 \notin \partial\Omega \Rightarrow x_0 \in \Omega$. Si ha:

- $H(\partial_{ij}^2 u(x_0)) < 0$ hessiana è definita negativa nei punti di max.
- $\nabla u(x_0) = 0$ gradiente è 0 nei punti di max

quindi si ha:

$Lu(x_0) = \Delta u(x_0) + b\nabla u(x_0) = \Delta u(x_0) \leq 0$

questo è assurdo perchè per ipotesi $Lu > 0$. $\square$

Utilizzando questo lemma, verifichiamo il principio di massimo debole, con $Lu = 0$

DIMOSTRAZIONE:

Definiamo una funzione $v := e^{x_1 \operatorname{sgn}(b_1)} - M$, M cost che verifica:

$$\begin{cases} Lv > 0 \\ v < 0 \text{ su } \bar{\Omega} \text{ (che è limitato)} \end{cases}$$

La funzione v rispetta le ipotesi del lemma precedente.

Perturbiamo u nel seguente modo: $\varepsilon > 0$

$L(u + \varepsilon v) = Lu + \varepsilon L v > 0$

Applicando il lemma otteniamo:

$$(u + \varepsilon v)(x) \leq \max_{\partial\Omega} (u + \varepsilon v) \quad \forall x \in \bar{\Omega}$$

$$\leq \max_{\partial\Omega} (u) \quad \text{poichè } v < 0 \text{ su } \bar{\Omega}$$

quindi $\forall x \in \bar{\Omega}$, $\forall \varepsilon > 0$: $u(x) + \varepsilon v(x) \leq \max_{\partial\Omega} u$

Mandando $\varepsilon \to 0$, otteniamo la tesi:

$$u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u \quad \forall x \in \bar{\Omega}$$

$\square$

ESERCIZIO 3

Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ tale che $\Delta u \geq 0$. Se

$$\limsup_{|y| \to +\infty} u(y) \leq 0 \Rightarrow \sup u \leq 0$$

SOLUZIONE:

Se $u(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow$ il teorema è vero

Altrimenti $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}^n$ t.c. $u(x_0) > 0$

Considero una palla $\overline{B(0,r)} \subseteq \mathbb{R}^n$ con r sufficientemente grande, tale che $x_0 \in \overline{B(0,r)}$

Per il teorema di Weierstrass, u assume massimo sulla palla chiusa $\overline{B(0,r)}$, dato che è compatta

Per il principio del massimo si ha:

$$\max_{\overline{B(0,r)}} u = \max_{\partial B(0,r)} u$$

Considero allora una successione $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non decrescente, tale che $r_0 = r$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ costruisco le palle $\overline{B(0,r_n)}$

Quindi si ha:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \max_{\partial B(0,r_n)} u = \max_{\overline{B(0,r_n)}} u$$

$$\leq \max_{\overline{B(0,r_{n+1})}} u = \max_{\partial B(0,r_{n+1})} u$$

$$\Rightarrow \sup_{\mathbb{R}^n} u \geq \max_{\partial B(0,r_n)} \geq u(x_0) > 0$$

se vuole passare all'inf, deve aver fatto $\sup_{|y| >= r\_n} u$

Quindi passando all'inf:

$$\limsup_{|y| \to \infty} u(y) > 0$$, che contraddice le ipotesi (Assurdo)

$$\Rightarrow \sup u \leq 0$$

□