ENZO MARIA MERLINO MAT. 905507.

Svolgimento esercizi assegnati

Esercizio 1.

Sia $L := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \partial_{ij}^2 u$ con $A = (a_{ij}) > 0$.

Sappiamo che

i) $|\Gamma| \le |x|^{-n+2}$; $|\partial_i \Gamma| \le |x|^{-n+1}$; $|\partial_{ij} \Gamma| \le |x|^{-n}$

ii) Se $B(x,r) := \{ y : \frac{1}{|\Gamma(x-y)|} \le r^{n-2} \}$ si ha:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \langle A \nabla \Gamma(y), r(y) \rangle_E \, d\sigma(y) = 1$$

Dimostriamo preliminarmente che per $u \in C^2(\Omega)$ ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto limitato) e per ogni sfera $\overline{B(x,\varepsilon)} \subset \Omega$ si ha

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \langle A \nabla \Gamma(x-y), r(y) \rangle \, u(y) \, d\sigma(y) = u(x)$$

dimost: Dalla condizione ii) e dall'invarianza dell'integrale per traslazioni abbiamo subito:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \langle A \nabla \Gamma(x-y), r(y) \rangle \, d\sigma(y) = 1 \quad \forall B(x,\varepsilon) \subset \Omega.$$

Inoltre

$$\left| \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \langle A \nabla \Gamma(x-y), r(y) \rangle \, u(y) \, d\sigma(y) - u(x) \right| =$$

$$= \left| \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \langle A \nabla \Gamma(x-y), r(y) \rangle \, u(y) \, d\sigma(y) - \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \langle A \nabla \Gamma(x-y), r(y) \rangle \, u(x) \, d\sigma(y) \right|$$

$$= \left| \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \langle A \nabla \Gamma(x-y), r(y) \rangle \, (u(y) - u(x)) \, d\sigma(y) \right|$$

$$\le \int_{\partial B(x,\varepsilon)} |\langle A \nabla \Gamma(x-y), r(y) \rangle| \cdot |u(y) - u(x)| \, d\sigma(y)$$

$$\le \max_{y \in \partial B(x,\varepsilon)} |u(y) - u(x)| \cdot \int_{\partial B(x,\varepsilon)} |\langle A \nabla \Gamma(x-y), r(y) \rangle| \, d\sigma(y)$$

$$\le \max_{y\in|\partial B(x,\varepsilon)|} |u(y)-u(x)| \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \langle A\nabla\Gamma(x-y), \nu(y)\rangle \, d\sigma(y)$$

$$= \max_{y\in\partial B(x,\varepsilon)} |u(y)-u(x)| \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} 0$$

quindi abbiamo:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \langle A\nabla\Gamma(x-y), \nu(y)\rangle u(y)\, d\sigma(y) = u(x).$$

□

Sappiamo inoltre che $\Gamma := \Gamma_L$ (soluzione fondamentale dell'operatore L) ha un polo nell'origine e che

$$L\Gamma = \delta \iff \forall \varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \int_{\mathbb{R}^n} L\Gamma(y)\varphi(y)\, dy = \varphi(0).$$

(def di soluz. fondam)

Consideriamo quindi $r<\varepsilon$ così $B(x,r)\subset B(x,\varepsilon)$ e

$$\int_{B(x,\varepsilon)\setminus B(x,r)} L\Gamma(x-y)u(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} L\Gamma(x-y)\, u(y)\, \chi_{B(x,\varepsilon)\setminus B(x,r)}(y)\, d\sigma(y)$$

$$\underset{\uparrow}{=} u\,\chi_{B(x,\varepsilon)\setminus B(x,r)}(y)\Big|_{y=x} = 0 \quad \text{essendo } \operatorname{supp}(u\,\chi_{B(x,\varepsilon)\setminus B(x,r)}) \subseteq \overline{B(x,\varepsilon)\cap B(x,r)^c}.$$

T soluz fond.

(~~Il supporto della δ~~ : $\operatorname{supp}\Gamma = \{0\} \Rightarrow$ fuori dall'origine $L\Gamma$ è nullo)

Allora integrando per parti abbiamo:

$$0 = \int_{B(x,\varepsilon)\setminus B(x,r)} L\Gamma(x-y)u(y)\, dy = \int_{B(x,\varepsilon)\setminus B(x,r)} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\partial_{ij}^2\Gamma(x-y)u(y)\, dy$$

$$= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\int_{B(x,\varepsilon)\setminus B(x,r)} \partial_{ij}^2\Gamma(x-y)u(y)\, dy =$$

$$= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\left[\int_{\partial(B(x,\varepsilon)\setminus B(x,r))} \partial_i\Gamma(x-y)\, u(y)\, \nu_j(y)\, d\sigma(y) - \int_{B(x,r)\setminus B(x,\varepsilon)} \partial_i\Gamma(x-y)\,\partial_j u(y)\, dy\right]$$

dove

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)\setminus B(x,r)} \partial_i\Gamma(x-y)u(y)\nu_j(y)\, d\sigma(y) = \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \partial_i\Gamma(x-y)u(y)\overline{\nu}_j(y)\, d\sigma(y) +$$

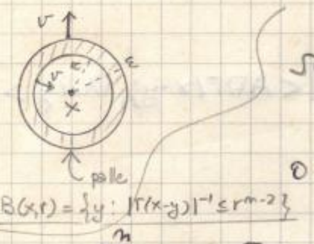
$$-\int_{\partial B(x,r)} \partial_i\Gamma(x-y)u(y)\hat{\nu}_j(y)\, d\sigma(y)$$

dove • $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$ è la normale esterna a $\partial(B(x,\varepsilon) \setminus B(x,r))$

• $\bar\nu = (\bar\nu_1, \dots, \bar\nu_m)$ è " " " a $\partial B(x,\varepsilon)$

• $\hat\nu = (\hat\nu_1, \dots, \hat\nu_n)$ " " " " a $\partial B(x,r)$

in altre parole $\nu(y) = \begin{cases} \bar\nu(y) & \text{per } y \in \partial B(x,\varepsilon) \\ -\hat\nu(y) & \text{per } y \in \partial B(x,r) \end{cases}$



Sviluppando si ottiene che

$$0 = \int_{B(x,\varepsilon)\setminus B(x,r)} L\Gamma(x-y)\, u(y) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} \Big[\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \partial_i \Gamma(x-y)\, u(y)\, \bar\nu_j(y)\, d\sigma(y) - \int_{\partial B(x,r)} \partial_i \Gamma(x-y)\, u(y)\, \hat\nu_j(y)\, d\sigma(y)$$

$$- \int_{B(x,\varepsilon)\setminus B(x,r)} \partial_i \Gamma(x-y)\, \partial_j u(y)\, dy \Big]$$

$$= \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\, \partial_i \Gamma(x-y)\, \bar\nu_j(y) u(y)\, d\sigma(y) - \int_{\partial B(x,r)} \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\, \partial_i \Gamma(x-y)\, u(y)\, \hat\nu_j(y)\, d\sigma(y)$$

$$- \int_{B(x,\varepsilon)\setminus B(x,r)} \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\, \partial_i \Gamma(x-y)\, \partial_j u(y)\, dy.$$

$$= \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \langle A \nabla\Gamma(x-y), \bar\nu(y) \rangle_E\, u(y)\, d\sigma(y) - \int_{\partial B(x,r)} \langle A\nabla\Gamma(x-y), \hat\nu(y)\rangle_E\, u(y)\, d\sigma(y)$$

$$- \int_{B(x,\varepsilon)\setminus B(x,r)} \langle A\nabla\Gamma(x-y), \nabla u(y)\rangle_E\, dy =: I_1 + I_2 + I_3 \quad (*)$$

dove:

$$I_1 := \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \langle A\nabla\Gamma(x-y), \bar\nu(y)\rangle_E\, u(y)\, d\sigma(y) = \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \langle A\nabla\Gamma(x-y), \nu(y)\rangle_E\, u(y)\, d\sigma(y)$$

$$I_2 := -\int_{\partial B(x,r)} \langle A\nabla\Gamma(x-y), \hat\nu(y)\rangle_E\, u(y)\, d\sigma(y) \xrightarrow[r\to 0^+]{} -u(x)$$

(rarbitrario)

per l'osservazione fatta all'inizio

Infine applicando il teorema della convergenza dominata, essendo $\overset{1}{\circ}$ $|\langle A\nabla\Gamma(x-y), \nabla u(y)\rangle| \leq \|A\nabla\Gamma(x-y)\|\cdot\|\nabla u(y)\|$

$\leq C\cdot\dfrac{1}{|x-y|^{n-1}} \in L^1(B(x,\varepsilon))$ (essendo $n-1<n$)

dove $C = \sqrt{n}\cdot\|A\|\cdot\max_{y\in\overline{B(0,\varepsilon)}}\|\nabla u\|$ (è ben definito essendo $u\in C^2(\Omega)$)

$\overset{2}{\circ}$ $|\langle A\nabla\Gamma(x-y), \nabla u(y)\rangle \chi_{B(0,r)^c}| \leq |\langle A\nabla\Gamma(x-y), \nabla u(y)\rangle|$

$\leq C\dfrac{1}{|x-y|^{n-1}} \in L^1(B(x,\varepsilon))$

abbiamo

$$I_3 := -\int_{B(x,\varepsilon)\setminus B(x,r)} \langle A\nabla\Gamma(x-y), \nabla u(y)\rangle_E\, dy = \int_{B(x,\varepsilon)} \langle A\nabla\Gamma(x-y), \nabla u(y)\rangle_E\, \chi_{B(0,r)^c}(y)\, dy \xrightarrow[\text{(rarbitrario)}]{r\to 0^+} \int_{B(x,\varepsilon)} \langle A\nabla\Gamma(x-y), \nabla u(y)\rangle_E\, dy$$

Sostituendo in (*) otteniamo così

$$u(x) = \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \langle A\nabla\Gamma(x-y), \nu(y)\rangle_E\, d\sigma(y) - \int_{B(x,\varepsilon)} \langle A\nabla\Gamma(x-y), \nabla u(y)\rangle_E\, dy$$

C.V.D ■

Esercizio 2.

Premettiamo il seguente lemma:

Lemma 1. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto limitato e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$ tale che $Lu > 0$ su Ω dove $Lu := \Delta u + \sum_{i=1}^n b_i \partial_i u$. $\Rightarrow \max_{\bar\Omega} u = \max_{\partial\Omega} u$.

dimost.: Sia $x_0 \in \bar\Omega$ il punto di massimo di u su $\bar\Omega$ (esiste per il teo. di Weierstraß) ora o $x_0 \in \partial\Omega$ oppure $x_0 \in \Omega$.
Se $x_0 \in \partial\Omega$ non c'è nulla da dimostrare.

Supponiamo che $x_0 \in \Omega$ e $u(x_0) = \max_{\bar\Omega} u$, essendo x_0 un pt di massimo interno la matrice Hessiana di u in x_0 sarà semidefinita negativa ($\mathrm{Hess}\, u(x_0) \le 0$) ed essendo poi $u \in C^2(\Omega)$, per il teo. di Fermat sui punti stazionari si ha $\nabla u(x_0) = 0$. Abbiamo quindi che:

$$0 < Lu(x_0) = \Delta u(x_0) + \underbrace{\cancel{\sum_{i=1}^n b_i \partial_i u}}_{=0\text{, essendo } \nabla u(x_0)=0} = \mathrm{tr}\, \mathrm{Hess}\, u(x_0) \le 0 \quad (\text{essendo } \mathrm{Hess}\, u(x_0) \le 0)$$

e questo chiaramente genera un assurdo. Necessariamente $x_0 \in \partial\Omega$ e questo conclude la dimostrazione ■

Vale un risultato analogo per il minimo

Lemma 2. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto limitato e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$ t.c. $Lu < 0$ su Ω. Allora $\min_{\Omega} u = \min_{\partial\Omega} u$

dimost: Procediamo come nella dimostrazione precedente: sia $x_0 \in \bar\Omega$ pt di minimo. Supponiamo ora che $x_0 \in \Omega$, allora avremo $\mathrm{Hess}\, u(x_0) \ge 0$ e $\nabla u(x_0) = 0$ così:

$$0 > Lu = \Delta u + \underbrace{\cancel{\sum_{i=1}^n b_i \partial_i u}}_{=0} = \mathrm{tr}\, \mathrm{Hess}\, u(x_0) \le 0$$

e questo genera un assurdo. Necessariamente quindi $x_0 \in \partial\Omega$ e questo conclude la dimostrazione ■

Dimostriamo ora che se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto limitato e

$u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ e $Lu = 0$ su Ω allora

1) $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$

2) $\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$

1) Consideriamo $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ e consideriamo $(w \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}))$
$w : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ così definita : $w = \sum_{h=1}^{n} b_h x_h = \langle b, x \rangle$
allora :

- se $b = 0$, $Lu = \Delta u$ e il principio di massimo vale e quindi non c'è nulla da dimostrare (vale per le funzioni armoniche).
- se invece $b \neq 0$ allora
$Lw = \Delta w + \sum_{j=1}^{n} b_j \partial_j x = \Delta w + \langle b, Dw \rangle = 0 + \|b\|^2 > 0$
dove abbiamo usato il fatto che : $Dw = b$ e $\Delta w = 0$.
Consideriamo ora una costante $M > \max_{\bar{\Omega}} w$ allora
se $\tilde{w} = w - M$,
$$\begin{cases} L\tilde{w} > 0 & \text{su } \Omega \\ \tilde{w} < 0 & \text{su } \bar{\Omega} . \end{cases}$$
Sia ora $\varepsilon > 0$ arbitrario allora :
$$L(u + \varepsilon\tilde{w}) \underset{\substack{\uparrow \\ L \text{ è lineare}}}{=} Lu + \varepsilon L\tilde{w} > 0 \quad \text{su } \Omega$$
così per il lemma 2 si ha che $\forall x \in \bar{\Omega}$:
$$u(x) + \varepsilon \tilde{w}(x) \leq \max_{\bar{\Omega}} u + \varepsilon\tilde{w} = \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon\tilde{w} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{essendo } \varepsilon\tilde{w} < 0}}{\leq} \max_{\partial\Omega} u .$$
Ora per l'arbitrarietà di ε , per $\varepsilon \to 0^+$ si ha ; $\forall x \in \bar{\Omega}$:
$$u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u \implies \max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

2) Per quanto riguarda il minimo possiamo sfruttare il punto 1) considerando al posto di u, $-u$. Sia $\tilde{u} = -u$, allora $\tilde{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ e $L\tilde{u} = 0$ (per linearità) e d'altra parte

$\max_{\partial\Omega} u = \min_{\partial\Omega} \tilde{u}$ e $\max_{\bar\Omega} u = \min_{\bar\Omega} \tilde{u}$ da cui per il punto 1) : $\min_{\partial\Omega} \tilde{u} = \min_{\bar\Omega} \tilde{u}$. ■

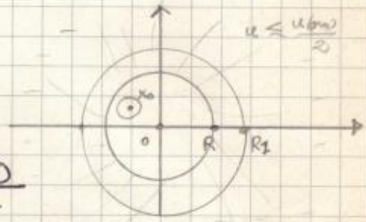
Esercizio 3.

Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ con $\Delta u \geq 0$ tc. $\limsup_{|y|\to+\infty} u(y) \leq 0$.

Dimostriamo che $\sup u \leq 0$.

- Se $u(x) \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ non c'è nulla da dimostrare.
- Supponiamo esista $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tc. $u(x_0) > 0$, allora per continuità esiste $\delta > 0$ tc. $\forall y \in B(x_0, \delta) =: B$ si ha $u(y) > 0$.

Ora, siccome $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e $\limsup_{|y|\to+\infty} u(y) \leq 0$, esiste $R > 0$ sufficientemente grande tali per cui:



- $x_0 \in \overline{B(0,R)}$ e $B \subset B(0,R)$
- $\forall y \in \mathbb{R}^n$ con $\|y\| > R$ $u(y) \leq \frac{u(x_0)}{2}$

(sul complementare della palla di centro 0 e raggio R, sufficientemente grande u assumerà valori ≤ 0, in particolare $\leq \frac{u(x_0)}{2} > 0$)

D'altra parte $\forall R_1 > R$ si ha che $\sup_{\mathbb{R}^n} u = \sup_{\overline{B(0,R_1)}} u \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teo di Weierstraß}}}{=} \max_{\overline{B(0,R_1)}} u$

Ora $u \in C^2(\mathbb{R}^n) \Rightarrow u \in C^2(\overline{B(0,R_1)})$ e $\Delta u \geq 0$ su $B(0,R_1)$.

Consideriamo $\forall \varepsilon > 0$ $u_\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon e^{x_1}$ dove $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

allora : $\Delta u_\varepsilon(x) = \Delta u(x) + \varepsilon e^{x_1} > 0 \quad \forall x \in B(0,R), \forall \varepsilon > 0$.

Quindi applicando il principio del massimo debole per le funzioni strettamente subarmoniche di classe C^2 su aperti limitati (visto in classe) sappiamo che : $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \overline{B(0,R_1)}$

$$u(x) \leq u_\varepsilon(x) \leq \max_{\overline{B(0,R_1)}} u_\varepsilon = \max_{\partial B(0,R_1)} u_\varepsilon = \max_{\partial B(0,R_1)} (u + \varepsilon e^{x_1})$$

ora per l'arbitrarietà di ε, per $\varepsilon \to 0^+$ otteniamo $\forall x \in \overline{B(0,R_1)}$:

$$u(x) \leq \max_{\partial B(0,R_1)} u \Rightarrow \max_{\overline{B(0,R_1)}} u = \max_{\partial B(0,R_1)} u .$$

Non si capisce perché aggiunge epsilon exp

Ma allora:

$$\max_{\overline{B(0,R_1)}} u = \max_{\partial B(0,R_1)} \le \frac{u(x_0)}{2}$$

e questo genera chiaramente un assurdo ($x_0 \in B(0,R) \subset B(0,R_1)$)

Necessariamente allora $u(x) \le 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ e quindi $\sup u \le 0$.