FLAVIA PASQUALI - ESERCIZI ASSEGNATI IL 28/2

1|

$\mathcal{L}u = \sum a_{ij} \partial^2_{ij} u$ con (a_{ij}) def. positiva

- $\mathcal{L}$ ha sol. fondamentale Γ
- $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \langle A \nabla \Gamma(y), \nu(y) \rangle \, d\sigma(y) = 1 \qquad (*)$

Dedurre che $\forall u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, Ω aperto e $\forall B(x,\varepsilon) \subset \Omega$

$$u(x) = \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \langle A \nabla \Gamma(x-y), \nu \rangle u(y) \, d\sigma(y) - \int_{B(x,\varepsilon)} \langle A \nabla \Gamma(x-y), \nabla u(y) \rangle \, dy$$

Sappiamo che $\int_{B(x,\varepsilon) \setminus B(x,r)} \mathcal{L}\Gamma(x-y) \, u(y) \, dy = 0$, nell'idea che $\varepsilon > r \longrightarrow 0$

$$\| \qquad \sum_{i,j} a_{ij} \int_{B(x,\varepsilon) \setminus B(x,r)} \partial^2_{ij} \Gamma(y) \, u(y) \, dy$$

$$\| \qquad \text{verso della normale}$$

$$\underbrace{\sum_{i,j} a_{ij} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \partial_j \Gamma(x-y) \, u(y) \, \nu_{est_{B(x,\varepsilon)}} \, d\sigma(y)}_{I_1} - \underbrace{\sum_{ij} a_{ij} \int_{\partial B(x,r)} \partial_j \Gamma(x-y) \, u(y) \, \nu_{est_{B(x,r)}} \, d\sigma(y)}_{I_2} +$$

$$\underbrace{- \sum_{i,j} a_{ij} \int_{B(x,\varepsilon) \setminus B(x,r)} \partial_j \Gamma(x-y) \, \partial_i u(y) \, dy}_{I_3}$$

$I_1 + I_2 + I_3 = 0$

I_1 non dipende da r, $I_1 = \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \langle A \nabla \Gamma(x-y), \nu_{est_{B(x,\varepsilon)}}(y) \rangle u(y) \, d\sigma(y)$

$I_2 = - \int_{\partial B(x,r)} \langle A \nabla \Gamma(x-y), \nu_{est_{B(x,r)}} \rangle u(y) \, d\sigma(y) \xrightarrow{r \to 0} -u(x)$

per osservazione sul nucleo vista a lezione + ipotesi $(*)$

$I_3 = - \int_{B(x,\varepsilon) \setminus B(x,r)} \langle A \nabla \Gamma(x-y), \nabla u(y) \rangle \, dy \xrightarrow{r \to 0} - \int_{B(x,\varepsilon)} \langle A \nabla \Gamma(x-y), \nabla u(y) \rangle \, dy$

$\Rightarrow$ Th $\qquad \square$

2| $Lu = \Delta u + b\nabla u$ con b vettore costante
Ω aperto, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ soluzione di $Lu = 0$

$\Rightarrow$ u assume massimo e minimo su $\partial\Omega$

Lemma 1: $Lu > 0 \Rightarrow \max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$

DIM|

sia x_0 p.to di massimo (esiste per Weierstrass: $u \in C(\overline{\Omega})$ e $\overline{\Omega}$ è compatto)

- se $x_0 \in \partial\Omega \Rightarrow$ la Th è vera
- se $x_0 \notin \partial\Omega \Rightarrow x_0 \in \Omega$

$$Lu(x_0) = \underbrace{\Delta u(x_0)}_{\leq 0} + b\,\underbrace{\nabla u(x_0)}_{= 0} \quad \text{perché } x_0 \text{ p.to di massimo}$$

$\Rightarrow Lu(x_0) \leq 0$ ASS $\square$

Analogamente si dimostra:

Lemma 2: $Lu < 0 \Rightarrow \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$

Di conseguenza,

DIM|

sia $v = e^{x_1 \operatorname{sgn}(b_1)} - M$ con M t.c. $v < 0$ su $\overline{\Omega}$, vale $Lv > 0$

sia $\varepsilon > 0$ e consid. $L(u + \varepsilon v) = \underbrace{Lu}_{= 0} + \varepsilon Lv = \varepsilon Lv > 0$

$$\Rightarrow \forall x \in \overline{\Omega} \quad (u + \varepsilon v)(x) \underset{\text{Lemma 1}}{\leq} \max_{\partial\Omega}(u + \varepsilon v) \underset{v<0}{\leq} \max_{\partial\Omega} u$$

$\Rightarrow u(x) + \varepsilon v(x) \leq \max_{\partial\Omega} u \quad \forall x \in \overline{\Omega} \quad \forall \varepsilon > 0$

$\varepsilon \to 0 \Rightarrow u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u \quad \forall x \in \overline{\Omega}$

in particolare, $\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u$

ovviamente $\max_{\partial\Omega} u \leq \max_{\overline{\Omega}} u$

$\Rightarrow \max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$

analogamente si dimostra la Th per il minimo $\square$

3|

$u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $\Delta u \geq 0$, $\limsup_{|y| \to +\infty} u(y) \leq 0$

$\Rightarrow \sup u \leq 0$

se $u(x) \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$ la Th è vera

se $\exists x_0$ t.c. $u(x_0) > 0 \Rightarrow \exists r > 0$ t.c. $\overline{B(0,r)} \ni x_0$

$\Delta u \geq 0 \Rightarrow$ (princ. del max debole) $\max_{\partial B(0,r)} u = \max_{\overline{B(0,r)}} u \geq u(x_0) > 0$

in particolare, $\operatorname{argmax} u \in \partial B(0,r)$

e $\max_{\partial B(0,r)} u > 0$

consid. ora $\overline{B(0,r')}$ con $r' > r$

$\Rightarrow$ (princ. max debole) $\max_{\partial B(0,r')} u = \max_{\overline{B(0,r')}} u \geq \max_{\partial B(0,r)} u$

in particolare, $\operatorname{argmax} u \in \partial B(0,r')$

e $\max_{\partial B(0,r')} u \geq \max_{\partial B(0,r)} > 0$

ripetendo il ragionamento, per $R \to +\infty$ si ha che

- $\operatorname{argmax} u \in \partial B(0,R)$
- $\max u$ è non decrescente al crescere di R

$\Rightarrow \sup_{|y| \geq R} u \geq \max_{|y| \geq R} u \geq \max_{\partial B(0,R)} u \geq u(x_0) > 0$ per $R \to \infty$

$\Rightarrow \inf_{R \to +\infty} \sup_{|y| \geq R} u > 0$ ASS

perciò, necessariamente, $u(x) \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$

e, di conseguenza, $\sup_{\mathbb{R}^n} u \leq 0$ $\square$