RECUPERO GIUSEPPE ANTONIO MATR. 890975

1) Sia $Lu = \sum_{i,j} a_{ij} \partial^2_{ij} u$ con $A = (a_{ij})$ def. positiva.

Sia Γ_L sol. fond. per L, t.c. $|\Gamma_L| \leq |x|^{2-n}$, $|\partial_i \Gamma_L| \leq |x|^{1-n}$, $|\partial_{ij} \Gamma_L| \leq |x|^{-n}$.

Sia $\tilde{B}(x,r) = \{ y \mid (\Gamma_L(x-y))^{-1} \leq r^{n-2} \}$. Sapendo che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \langle A \nabla \Gamma_L(y), \nu(y) \rangle \, d\sigma(y) = 1$$, mostrare che

$\forall u \in C^2(\Omega)$, $\forall \tilde{B}(x,r) \subseteq \Omega$, vale

$$u(x) = \int_{\partial B(x,r)} \langle A \nabla \Gamma_L(x-y), \nu(y) \rangle u(y) \, d\sigma(y) - \int_{B(x,r)} \langle A \nabla \Gamma_L(x-y), \nabla u(y) \rangle dy$$

Osservo che, per $y \in \partial \tilde{B}(x,r)$, data $\nu(y)$ normale esterna, si ha

$$\langle A \nabla \Gamma_L(x-y), \nu(y) \rangle = \langle A \nabla \Gamma_L(x-y), \frac{\nabla \Gamma_L(x-y)}{\| \nabla \Gamma_L(x-y) \|} \rangle =$$

$$= \frac{1}{\| \nabla \Gamma_L(x-y) \|} \langle A \nabla \Gamma_L(x-y), \nabla \Gamma_L(x-y) \rangle > 0 ,$$

poiché $\partial \tilde{B}(x,r)$ é costituito dai punti y che soddisfano l'equazione

$\Gamma_L(x-y) = r^{2-n}$ e la normale é data dal gradiente.

Per ipotesi $L\Gamma_L(z) = 0$ $\forall z \neq 0$. Dunque

$$0 = \int_{\tilde{B}(x,r) \setminus \tilde{B}(x,\varepsilon)} L\Gamma_L(x-y) u(y) \, dy = \int_{\tilde{B}_r \setminus \tilde{B}_\varepsilon} \nabla \cdot (A \nabla \Gamma_L(x-y)) u(y) \, dy =$$

$$= \int_{\tilde{B}_r \setminus \tilde{B}_\varepsilon} \nabla \cdot (A \nabla \Gamma_L(x-y) u(y)) \, dy - \int_{\tilde{B}_r \setminus \tilde{B}_\varepsilon} \langle A \nabla \Gamma_L(x-y), \nabla u(y) \rangle \, dy =$$

$$= \int_{\partial(\tilde{B}_r \setminus \tilde{B}_\varepsilon)} \langle A \nabla \Gamma_L(x-y), \nu(y) \rangle u(y) \, d\sigma(y) - \int_{\tilde{B}_r \setminus \tilde{B}_\varepsilon} \langle A \nabla \Gamma_L(x-y), \nabla u(y) \rangle \, dy =$$

.....

RECUPERO GIUSEPPE ANTONIO MATR. 890975

$$= \int_{\partial \tilde{B}_r} < A \nabla \Gamma_L (x-y), \nu(y) > u(y) \, d\sigma(y) - \int_{\partial \tilde{B}_\varepsilon} < A \nabla \Gamma_L (x-y), \nu(y) > u(y) \, d\sigma(y) -$$

$$- \int_{\tilde{B}_r \setminus \tilde{B}_\varepsilon} < A \nabla \Gamma_L (x-y), \nabla u(y) > dy = I_1 - I_2 - I_3$$

I_1 costante rispetto a ε; $I_3 \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \int_{\tilde{B}_r} < A \nabla \Gamma_L (x-y), \nabla u(y) > dy$.

La tesi è verificata se $I_2 \xrightarrow{\varepsilon \to 0} u(x)$.

$$|I_2 - u(x)| = \left| \int_{\partial \tilde{B}_\varepsilon} < A \nabla \Gamma_L (x-y), \nu(y) > u(y) \, d\sigma(y) - u(x) \right| =$$

$$= \left| \int_{\partial \tilde{B}_\varepsilon} < A \nabla \Gamma_L (x-y), \nu(y) > (u(y) - u(x)) \, d\sigma(y) \right| \leq$$

questo va precisato. Noi non sappiamo che l'integrale fa 1. Solo che tende a 1

$$\leq \max_{\partial \tilde{B}_\varepsilon} |u(y) - u(x)| \int_{\partial \tilde{B}_\varepsilon} | < A \nabla \Gamma_L (x-y), \nu(y) > | \, d\sigma(y) = \text{(per oss. precedente)}$$

$$= \max_{\partial \tilde{B}_\varepsilon} |u(y) - u(x)| \int_{\partial \tilde{B}_\varepsilon} < A \nabla \Gamma_L (x-y), \nu(y) > d\sigma(y) =$$

$$= \max_{\partial \tilde{B}_\varepsilon} |u(y) - u(x)| \xrightarrow{\varepsilon \to 0} u(x) \quad \checkmark$$

RECUPERO GIUSEPPE ANTONIO MATR. 890975

2) Sia $Lu = \Delta u + \vec{b} \cdot \nabla u$, con $\vec{b}$ costante.
Sia Ω aperto, sia $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ soluzione di $Lu = 0$.
Mostrare che u ha minimo e massimo su $\partial\Omega$.

Innanzitutto dimostro un lemma:

LEMMA. Sia $Lu = \Delta u + \vec{b} \cdot \nabla u$. Sia $v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, con Ω aperto.

1) Se $Lv > 0$, allora $\max\limits_{\bar{\Omega}} v = \max\limits_{\partial\Omega} v$

2) Se $Lv < 0$, allora $\min\limits_{\bar{\Omega}} v = \min\limits_{\partial\Omega} v$

DIM. 1) Sia x_0 punto di massimo per v. Se $x_0 \in \bar{\Omega}$, la tesi è vera.
Se $x_0 \in \Omega$, allora $0 < Lv(x_0) = \Delta v(x_0) + \vec{b} \cdot \nabla v(x_0) = \Delta v(x_0)$
dunque $\Delta v(x_0) > 0$, ASSURDO poiché x_0 massimo.

2) Analogamente

$\square$

Ora mostro che u ha massimo in $\partial\Omega$.

Sia $w(x) = \vec{b} \cdot \vec{x}$; $Lw = \Delta(\vec{b} \cdot \vec{x}) + \sum b_i \partial_i (\vec{b} \cdot \vec{x}) = 0 + \|\vec{b}\|^2 > 0$

Sia M t.c. $\tilde{w} := w - M < 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega}$.

$L\tilde{w} = Lw > 0$. Considero la funzione $u + \varepsilon \tilde{w}$, con $\varepsilon > 0$.
$L(u + \varepsilon \tilde{w}) = L(u) + \varepsilon L(\tilde{w}) > 0$. Per il lemma, $\forall x \in \Omega$ vale

$$(u + \varepsilon \tilde{w})(x) \leq \max_{\bar{\Omega}} (u + \varepsilon \tilde{w}) = \max_{\partial\Omega} (u + \varepsilon \tilde{w}) \leq \max_{\partial\Omega} u \quad \forall \varepsilon > 0$$

$\Rightarrow u(x) \leq \max\limits_{\partial\Omega} u \quad \forall x \in \bar{\Omega}$

$\Rightarrow u$ ha massimo sulla frontiera di Ω

⋮

RECUPERO GIUSEPPE ANTONIO   Matr. 890975

Ora mostro che u ha minimo in $\partial\Omega$.

Sia $w = -\vec{b} \cdot \vec{x}$. Sia M t.c. $\tilde{w} := w + M > 0$.

$$L\tilde{w} = Lw = \Delta(-\vec{b}\cdot\vec{x}) + \sum b_i \partial_i (-\vec{b}\cdot\vec{x}) = 0 - \|\vec{b}\|^2 < 0$$

Considero la funzione $u + \varepsilon\tilde{w}$, con $L(u+\varepsilon\tilde{w}) < 0$.

Per il lemma, $\forall x \in \Omega$ vale

$$(u+\varepsilon\tilde{w})(x) \geq \min_{\bar{\Omega}}(u+\varepsilon\tilde{w}) = \min_{\partial\Omega}(u+\varepsilon\tilde{w}) \geq \min_{\partial\Omega} u \quad \forall \varepsilon > 0.$$

$$\Rightarrow u(x) \geq \min_{\partial\Omega} u \quad \forall x \in \Omega \Rightarrow u \text{ ha minimo in } \partial\Omega$$

$\square$

RECUPERO GIUSEPPE ANTONIO Matr. 890975

3) Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ t.c. $\Delta u \geq 0$. Se $\limsup_{|y| \to +\infty} u(y) \leq 0$

Allora $\sup_{\mathbb{R}^n} u \leq 0$.

Sia $n \in \mathbb{N}$. Mostro che $\sup_{x \in B(0,n)} u(x) \leq \sup_{x \in B(0,n)^c} u(x)$

Per Assurdo, suppongo $\exists\, \bar{x} \in B(0,n)$ t.c. $u(\bar{x}) > \sup_{x \in B(0,n)^c} u(x)$

$B(0, n+1)$ é insieme aperto limitato,
$u \in C^2(B(0,n+1)) \cap C(\overline{B(0,n+1)})$ e $\Delta u \geq 0$.

Per il principio del massimo debole,

$$u(\bar{x}) \leq \max_{\overline{B(0,n+1)}} u(x) = \max_{\partial B(0,n+1)} u(x) \leq \sup_{B(0,n)^c} u(x)$$

il ché é Assurdo. Dunque $\sup_{B(0,n)} u(x) \leq \sup_{B(0,n)^c} u(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Allora $\sup_{\mathbb{R}^n} u(x) = \lim_{n \to \infty} \sup_{B(0,n)} u(x) \leq \lim_{n \to \infty} \sup_{B(0,n)^c} u(x) =$

$$= \inf_{n \to \infty} \sup_{B(0,n)^c} u(x) = \limsup_{|x| \to +\infty} u(x) \leq 0$$

$\square$