ES 1

. $L = \sum_{i,j} a_{ij}\, \partial_{ij}^2$ $\qquad (a_{ij})$ def > 0

1) L ha soluzione fondamentale Γ t.c.

$|\Gamma| \leq |x|^{2-m}$, $|\partial_i \Gamma| \leq |x|^{1-m}$, $|\partial_{ij}\Gamma| \leq |x|^{-m}$

2) $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \langle A \nabla \Gamma(y), \nu(y) \rangle_E \, d\sigma(y) = 1$

$$B(x,r) = \{ y : |\Gamma(x-y)|^{-1} \leq r^{m-2} \}$$

$u \in C^2(\Omega)$ $\quad \Omega$ aperto di $\mathbb{R}^m$

$\forall$sfera inclusa in Ω

$$u(x) = \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \langle A \nabla \Gamma(x-y), \nu \rangle_E \, u(y)\, d\sigma(y) - \int_{B(x,\varepsilon)} \langle A \nabla \Gamma(x-y), \nabla u(y) \rangle_E \, dy$$

Γ è soluzione fondamentale di L

$\Downarrow$

$$\int_{B(x,r)\setminus B(x,\varepsilon)} L\Gamma(x-y)\, u(y)\, dy = 0 \qquad \text{con } r > \varepsilon$$

$$\| $$

$$\sum_{i,j} a_{ij} \int_{B(x,r)\setminus B(x,\varepsilon)} \partial_{ij}^2 \Gamma(x-y)\, u(y)\, dy$$

Integro per parti :

$$0 = \sum_{i,j} a_{ij} \Bigg(\int_{\partial B(x,r)} \partial_i \Gamma(x-y) \cdot \nu \; u(y)\, d\sigma(y) + \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \partial_i \Gamma(x-y) \cdot \nu \; u(y)\, d\sigma(y) +$$

$$- \int_{B(x,r)\setminus B(x,\varepsilon)} \partial_j \Gamma(x-y)\, \partial_i u(y)\, dy \Bigg) =: I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_1 = \int_{\partial B(x,r)} \sum_{i,j} a_{ij} \partial_i \Gamma(x-y) \cdot \nu \; u(y)\, d\sigma(y) = \int_{\partial B(x,r)} \langle A \nabla \Gamma(x-y) \cdot \nu \rangle u(y)\, d\sigma(y)$$

viene per ν esterna a $B(x,r)\setminus B(x,\varepsilon)$

$$I_2 = - \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \sum_{i,j} a_{ij}\, \partial_i \Gamma(x-y) \cdot \nu\, u(y)\, d\sigma(y) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} -u(x)$$

grazie all'ipotesi 2

$$I_3 = - \int_{B(x,r)} \sum_{i,j} a_{ij}\, \partial_i u(y)\, \partial_j \Gamma(x-y)\, dy = - \int_{B(x,r)} \langle A \nabla \Gamma(x-y), \nabla u(y) \rangle_E\, dy$$

si, c'era un limite

$$\Rightarrow \quad u(x) = I_1 + I_3 =$$

$$= \int_{\partial B(x,r)} \langle A \nabla \Gamma(x-y), \nu \rangle_E\, u(y)\, d\sigma(y) - \int_{B(x,r)} \langle A \nabla \Gamma(x-y), \nabla u(y) \rangle_E\, dy$$

ES 2

- $Lu = \Delta u + b\nabla u$ con b vettore costante

Ω aperto $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ soluzione di $Lu = 0$

$$\Rightarrow \max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u \quad e \quad \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$$

Innanzitutto dimostro che se $Lu > 0$ allora $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$

Considero x_0 punto di max di u, $x_0 \in \overline{\Omega}$.
Se $x_0 \in \partial\Omega$ non c'è nulla da dimostrare.
Altrimenti $x_0 \in \Omega$.

$$Lu = \Delta u + b\nabla u = \sum_{i,j} a_{ij} \partial_{ij}^2 u + \sum_i b_i \partial_i u =$$

$$= Tr(AH) + \sum_i b_i \partial_i u \qquad \text{dove } H \text{ è la matrice hessiana}$$

$$Lu(x_0) = \underbrace{Tr(AH)(x_0)}_{\substack{\leq 0 \\ \text{perché } H \text{ è} \\ \text{def} \leq 0 \\ \text{in } x_0 \in \Omega}} + \underbrace{\sum_i b_i \partial_i u(x_0)}_{\substack{= \\ 0 \text{ perché } x_0 \text{ è punto di max}}} \leq 0$$

semidefinita

Ma per ipotesi $Lu > 0 \Rightarrow$ ASSURDO! $\Rightarrow x_0 \in \partial\Omega$

Si dimostra in maniera analoga che $\min_{\partial\Omega} u = \min_{\overline{\Omega}} u$ se $Lu < 0$.

Dimostro ora che il max u è assunto sulla $\partial\Omega$ nel caso in cui $Lu = 0$.

Prendo $w(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k x_k$

$$Lw = \Delta w + b\nabla w = 0 + \|b\|^2 > 0$$

Definisco $\tilde{w} := w - M$ con $M > \max_{\overline{\Omega}} w$

$$\Rightarrow \begin{cases} L\tilde{w} > 0 \\ \tilde{w} < 0 \text{ su } \overline{\Omega} \end{cases}$$

$$L(u+\varepsilon\tilde{\omega}) = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{Lu} + \varepsilon \underset{\overset{\vee}{0}}{L\tilde{\omega}} > 0 \qquad \varepsilon > 0$$

Per quanto dimostrato in precedenza

$$(u+\varepsilon\tilde{\omega})(x) \leq \max_{\partial\Omega}(u+\varepsilon\tilde{\omega}) \leq \max_{\partial\Omega} u \qquad \forall x \in \overline{\Omega}$$

poiché $\tilde{\omega} < 0$

Poiché questo vale $\forall \varepsilon > 0$ si ha:

$$\varepsilon \longrightarrow 0^+ \qquad \forall x \in \overline{\Omega} \qquad u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u$$

Si procede analogamente per dimostrare che se $Lu = 0$ allora assume minimo sulla $\partial\Omega$.

ES 3

$u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ t.c. $\Delta u \geq 0$

$\limsup_{|y| \to +\infty} u(y) \leq 0$

$$\Rightarrow \quad \sup u \leq 0$$

Se $u(x) \leq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ non c'è nulla da dimostrare.
Altrimenti $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n$ t.c. $u(x_0) > 0$, e per continuità $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in \overline{B(x_0, \delta)}$ $u(x) > 0$.

Prendo $R > 0$ in modo che $x_0 \in \overline{B(0,R)}$.
u assume massimo in $\overline{B(0,R)}$ e poiché $\Delta u \geq 0$ si ha

$$\sup_{\overline{B(0,R)}} u = \max_{\overline{B(0,R)}} u = \max_{\partial B(0,R)} u$$

Poiché $\limsup_{|y| \to +\infty} u(y) \leq 0$ $\quad \forall y \in \mathbb{R}^n : |y| > R \quad u(y) \leq \frac{u(x_0)}{2}$

Allora,

$$u(x_0) \leq \sup_{\overline{B(0,R)}} u = \max_{\partial B(0,R)} u \leq \frac{u(x_0)}{2}$$

ASSURDO!