Esercizi

1.

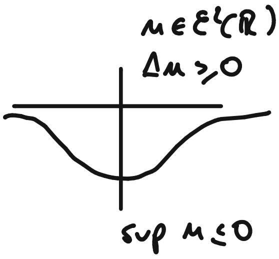
Sia
$$L = \sum_{i,j} a_{ij}\partial^2_{ij} u$$
dove (a_{ij}) e' definita positiva. Sappiamo che

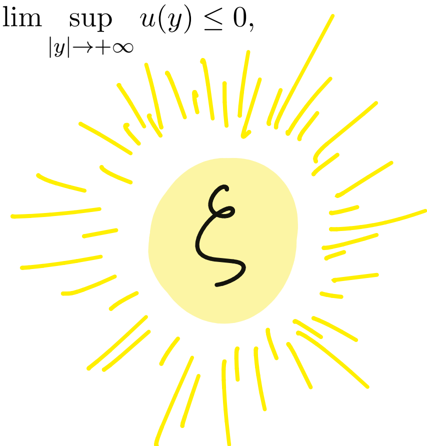
- L ha una soluzione fondamentale Γ tale che $|\Gamma| \leq |x|^{-n+2}$, $|\partial_i \Gamma| \leq |x|^{-n+1}$, $|\partial_{ij}\Gamma| \leq |x|^{-n}$
- $$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial B(0,\epsilon)} < A\nabla\Gamma(y), \nu(y) >_E d\sigma(y) = 1$$
  dove $B(x,r) = \{y : |\Gamma(x-y)|^{-1} \leq r^{n-2}\}$

Dedurne che per ogni funzione di classe C^2 in un aperto Ω e per ogni sfera inclusa in Ω
$$u(x) = \int_{\partial B(x,\epsilon)} < A\nabla\Gamma(x-y), \nu >_E u(y) d\sigma(y) - \int_{B(x,\epsilon)} < A\nabla\Gamma(x-y), \nabla u(y) >_E dy$$

2. Sia $Lu = \Delta u + b\nabla u$, dove b e' un vettore costante. Se Ω e' aperto, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\hat{\Omega})$, e' soluzione dell'equazione $Lu = 0$, provare che u assume massimo e minimo sulla frontiera di Ω.

3. Sia $u \in C^2(R^n)$ tale che $\Delta u \geq 0$. Se
$$\lim_{|y| \to +\infty} \sup u(y) \leq 0,$$
allora $\sup u \leq 0$





①

$$L := \sum_{i,j} a_{ij}\partial^2_{ij}$$

$T_L(x-y)$ ha un polo per $y=x$ e per $y\in B(x,r)\setminus B(x,\varepsilon)$, $r,\varepsilon>0$, $\varepsilon<r$ si ha $LT_L=0$, con

$$B(x,r)=\left\{y\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, \frac{1}{|T(x-y)|^{-1}} < r^{n-2}\right\}$$

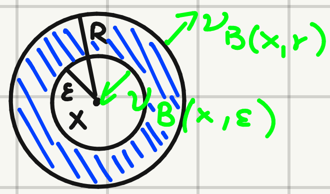
Sia $B_{r,\varepsilon} := B(x,r)\setminus B(x,\varepsilon)$.
In $B_{r,\varepsilon}$ T_L non ha poli e quindi, per $u\in\mathcal{E}^2(\Omega)$,

$$\int_{B_{r,\varepsilon}} LT_L(x-y)u(y)\,dy \equiv 0$$

Integrando per parti:

$$0=\int_{B_{r,\varepsilon}}\sum_{i,j}a_{ij}\partial^2_{ij}T_L(x-y)u(y)\,dy=$$

$$=\int_{\partial B_{r,\varepsilon}}\sum_{i,j}a_{ij}\big((\partial_i T_L)(x-y)\big)\nu_j(y)u(y)\,d\mathcal{H}^{n-1}$$
$$-\int_{B_{r,\varepsilon}}\sum_{i,j}a_{ij}\big((\partial_i T_L)(x-y)\big)\cdot\big((\partial_j u)(y)\big)\,dy$$



$$=\int_{\partial B(x,r)}\langle A\nabla T_L(x-y),\nu(y)\rangle_E\, u(y)\,d\mathcal{H}^{n-1}-$$
$$-\int_{\partial B(x,\varepsilon)}\langle A\nabla T_L(x-y),\nu(y)\rangle_E\, u(y)\,d\mathcal{H}^{n-1}-$$

diventa "−" perché qui ν è "interna" a $B(x,\varepsilon)$

$$-\int_{B_{r,\varepsilon}}\langle A\nabla T_L(x-y),\nabla u(y)\rangle_E\,dy =:$$

$=: I_1 + I_2 + I_3$

Studio i 3 integrali:

I_1) L'integrale é su $\partial B(x,r)$ che é indipendente da ε, quindi

$$I_1 \xrightarrow{\varepsilon \to 0^+} \int_{\partial B(x,r)} \langle A \nabla T_L(x-y), \nu(y) \rangle_E \, u(y) \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

I_2) So che essendo T_L sol. fondamentale,

$$(1) \quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \langle A \nabla T_L(x-y), \nu(y) \rangle_E \, d\mathcal{H}^{n-1} = 1$$

Quindi:

$$\left| \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \langle A \nabla T_L(x-y), \nu(y) \rangle_E \, u(y) \, d\mathcal{H}^{n-1} - u(x) \right| =$$

$$\overset{(1)}{=} \left| \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \langle A \nabla T_L(x-y), \nu(y) \rangle_E \, u(y) \, d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \langle A \nabla T_L(x-y), \nu(y) \rangle_E \, u(x) \, d\mathcal{H}^{n-1} \right| \leq$$

$$\leq \int_{\partial B(x,\varepsilon)} |u(y) - u(x)| \cdot |\langle A \nabla T_L(x-y), \nu(y) \rangle_E| \, d\mathcal{H}^{n-1} \leq$$

$$\overset{\varepsilon^2}{\leq} \max_{\partial B(x,\varepsilon)} |u(y) - u(x)| \cdot \int_{\partial B(x,\varepsilon)} |\langle A \nabla T_L(x-y), \nu(y) \rangle_E| \, d\mathcal{H}^{n-1} =$$

ma $\max_{\partial B(x,\varepsilon)} |u(y) - u(x)| \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} 0 \implies I_2 \xrightarrow{\varepsilon \to 0^+} u(x)$.

e $\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \langle A \nabla T_L(x-y), \nu(y) \rangle_E \, d\mathcal{H}^{n-1} \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} 1$

$I_3)$ $$I_3 = \int_{B(x,r)\setminus B(x,\varepsilon)} \langle A\nabla T_L(x-y), \nabla u(y)\rangle_E \, dy$$

Noto che:

$$|\langle A\nabla T_L(x-y), \nabla u(y)\rangle_E| \overset{\text{CAUCHY-SCHWARZ}}{\leq} \|A\nabla T_L(x-y)\|_E \cdot \|\nabla u(y)\|_E \leq$$

$$\leq |\lambda_{max}| \, \|\nabla T_L(x-y)\|_E \cdot C,$$

λ_{max} massimo autovalore di A e

$$C := \max_{B_{r,\varepsilon}} \|\nabla u\|_E$$

e $C < +\infty$ essendo $u \in \mathcal{C}^2 \Rightarrow \nabla u \in \mathcal{C}^1$.

Ma

$$|\partial_i T_L(x-y)| \leq \frac{1}{\|x-y\|_E^{n-1}}$$

$$\Rightarrow \|\nabla T_L(x-y)\|_E \leq \|x-y\|_E^{1-n} < +\infty \text{ in } B_{r,\varepsilon}.$$

Inoltre

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\langle A\nabla T_L(x-y), \nabla u(y)\rangle_E \, \chi_{B_{r,\varepsilon}}(y)| \, dy \leq$$ <u>coordinate polari, $\varepsilon \leq \rho < r$, $0 \leq \theta_i < 2\pi$</u>

$$\leq |\lambda_{max}| C \frac{1}{\rho^{n-1}} \rho^n =$$

$$= |\lambda_{max}| C \rho \xrightarrow{\varepsilon \to 0^+} 0$$

(Essendo sommabile per $\varepsilon \to 0^+$ posso passare al limite sotto sgn. integrale (conv. dominata)) da cui per $\varepsilon \to 0^+$ si ha:

$$0 = \int_{\partial B(x,r)} \langle A\nabla T_L(x-y), \nu(y)\rangle_E \, u(y) \, d\mathcal{H}^{n-1} - u(x) - \int_{B(x,r)} \langle A\nabla T_L(x-y), \nabla u(y)\rangle_E \, dy.$$

q.e.d.

(2) Se $Lu > 0$ allora nelle ipotesi di Ω limitato aperto, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ si ha

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

$\boxed{\text{DIM}}$ Sia $x_0 \in \overline{\Omega}$ p.to in cui u assume massimo. Se $x_0 \in \partial\Omega$ non c'é nulla da dimostrare. Se $x_0 \in \Omega$ allora

$$H_u(x_0) < 0 \Rightarrow \underbrace{\Delta u}_{= Tr(H_f(x_0))}(x_0) < 0$$

e per il teorema di Fermat sui punti stazionari, con $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$

$$\nabla u(x_0) = 0$$

Ma allora $Lu(x_0) < 0$ ed é assurdo.

q.e.d.

Nello stesso modo si puó mostrare che se $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ e se $Lu < 0$

$$\min_{\Omega} u = \min_{\partial\Omega} u$$

perché se $x_0 \in \overline{\Omega}$ é p.to di minimo, allora se $x_0 \in \partial\Omega$ non c'é nulla da dim.. Se $x_0 \in \Omega$ si avrebbe che $\Rightarrow tr(H_u(x_0)) = \Delta u(x_0) > 0$

$$H_u(x_0) > 0, \quad \nabla u(x_0) = 0$$

$\Rightarrow Lu(x_0) > 0$ ed é assurdo.

q.e.d.

Uso questo risultato per dimostrare la teoria dell'esercizio. Considero una funzione v tale che $Lv \geq 0$ su Ω, $b = (b_1, \dots, b_n)$ costante. Considero

$$v := b_1 x_1$$

dove x_1 è la prima coordinata di $(x_1, \dots, x_n)$. Si ha così $Lv = 0 + b_1^2 > 0$ e allora considero la funzione

$$u_\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon v(x)$$

Quindi applicando L:

$$Lu_\varepsilon = Lu + \varepsilon Lv \overset{\text{Hyp.}}{=} \varepsilon Lv > 0$$

e per com'è definita, $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ $\Rightarrow$ si applica il risultato precedente e ho

$$\begin{array}{ccc} \max\limits_{\partial\Omega} u_\varepsilon & = & \max\limits_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon \\ \downarrow \varepsilon \to 0^+ & & \downarrow \varepsilon \to 0^+ \\ \max\limits_{\partial\Omega} u & = & \max\limits_{\overline{\Omega}} u \end{array}$$

Nel caso del minimo basta considerare

$$v := -b_1 x_1$$

Da cui $Lv < 0 \Rightarrow Lu_\varepsilon < 0$, quindi

$$\min_{\partial\Omega} u \xleftarrow[\varepsilon \to 0^+]{} \min_{\partial\Omega} u_\varepsilon = \min_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} \min_{\overline{\Omega}} u$$

q.e.d.

(3) $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^m)$, $\Delta u \geq 0$ e $\limsup_{\|y\| \to +\infty} u(y) \leq 0$

Se $u \leq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^m$, non c'è nulla da mostrare
Suppongo che $\sup u > 0$ ma essendo interno e $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^m)$, $\sup u = \max u \Rightarrow \exists x_0$ p.to di massimo!

$$u(x_0) = \max_{\mathbb{R}^m} u > 0$$

Quindi per continuità esiste $R > 0$ tale che

$$u(x) > 0$$

$\forall x \in B(x_0, R)$. Ma $\limsup_{\|y\| \to +\infty} u(y) \leq 0 \Rightarrow \exists \rho > 0$, tale che

$$u(x) < \frac{u(x_0)}{2}$$

$\forall x \in B(x_0, \rho)$. Ma allora, per il principio di max. deb.

$$\underbrace{\max_{\overline{B(x_0,\rho)}}}_{= u(x_0)} = \max_{\partial B(x_0,\rho)}, \quad \max_{\mathbb{R}^m \setminus B(x_0,\rho)} = \underbrace{\max_{\partial B(x_0,\rho)}}_{< \frac{u(x_0)}{2}}$$

ed è assurdo.

q.e.d.