BANDINI MICHELE - ESERCIZI ASSEGNATI IL 28/2

$\boxed{1}$ Sia $\quad L = \sum_{i,j} a_{ij}\, \partial^2_{ij}\, u$

dove (a_{ij}) è definita positiva. Sappiamo che:

a) L ha soluzione fondamentale Γ tale che $|\Gamma| \le |x|^{-n+2}$, $|\partial_i \Gamma| \le |x|^{-n+1}$,
$|\partial_{ij} \Gamma| \le |x|^{-n}$

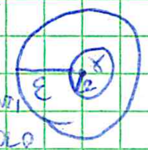
b) $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \langle A \nabla \Gamma(y), \nu(y) \rangle_E \, d\sigma(y) = 1$, dove $B(x,r) = \{ y : |\Gamma(x-y)|^{-1} \le r^{n-2} \}$

Dedurne che per ogni funzione di classe C^2 in un aperto Ω e per ogni sfera inclusa in Ω:

$$u(x) = \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \langle A \nabla \Gamma(x-y), \nu \rangle_E \, u(y)\, d\sigma(y) - \int_{B(x,\varepsilon)} \langle A \nabla \Gamma(x-y), \nabla u(y) \rangle_E \, dy$$

SVOLGIMENTO

PRESO $0<r<\varepsilon$, SAPPIAMO CHE $\int_{B(x,\varepsilon) \setminus B(x,r)} L\Gamma(x-y)\, u(y)\, dy = 0$, POICHÉ TOGLIAMO I PUNTI VICINO AL POLO



$$\Rightarrow 0 = \sum_{i,j} a_{ij} \int_{B(x,r) \setminus B(x,\varepsilon)} \partial_i \partial_j \Gamma(x-y)\, u(y)\, u(y)\, dy =$$

PER SEGNO DELLA NORMALE

$$= \underbrace{\sum_{i,j} a_{ij} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \partial_j \Gamma(x-y)\, u(y)\, \nu_{ext_{B(x,\varepsilon)}}}_{I_1} - \underbrace{\sum_{i,j} a_{ij} \int_{\partial B(x,r)} \partial_j \Gamma(x-y)\, u(y)\, \nu_{ext_{B(x,r)}}\, d\sigma(y)}_{I_2} +$$

$$- \underbrace{\sum_{i,j} a_{ij} \int_{B(x,\varepsilon) \setminus B(x,r)} \partial_j \Gamma(x-y)\, \partial_i u(y)\, dy}_{I_3}$$

$$\Rightarrow I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

I_1 non dipende da r, quindi si riscrive $I_1 = \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \langle A \nabla \Gamma(x-y), \nu \rangle\, u(y)\, d\sigma(y)$

$I_2 = -\int_{\partial B(x,r)} \langle A \nabla \Gamma(x-y), \nu_{ext_{B(x,r)}} \rangle\, u(y)\, d\sigma(y) \xrightarrow{r \to 0} -u(x)$ per b) e per osservazione svolta in classe

$I_3 = -\int_{B(x,\varepsilon) \setminus B(x,r)} \langle A \nabla \Gamma(x-y), \nabla u(y) \rangle\, dy \xrightarrow{r \to 0} -\int_{B(x,\varepsilon)} \langle A \nabla \Gamma(x-y), \nabla u(y) \rangle\, dy$

$$\Rightarrow \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \langle A \nabla \Gamma(x-y), \nu \rangle\, u(y)\, d\sigma(y) - u(x) - \int_{B(x,\varepsilon)} \langle A \nabla \Gamma(x-y), \nabla u(y) \rangle\, dy = 0,$$

CHE È LA TESI. $\square$

4) $Lu = \Delta u + b\nabla u$, con b vettore costante; Ω aperto, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ è soluzione di $Lu = 0$

$\Rightarrow u$ assume massimo e minimo su $\partial\Omega$

- LEMMA ①: $Lu > 0 \Rightarrow \max\limits_{\overline{\Omega}} u = \max\limits_{\partial\Omega} u$

- <u>DIM</u>: Sia x_0 punto di massimo: (ESISTE PER WEIERSTRASS: $\overline{\Omega}$ È COMPATTO E u È CONTINUA SU ESSO)

  se $x_0 \in \partial\Omega \Rightarrow$ la tesi è vera

  se $x_0 \notin \partial\Omega \Rightarrow x_0 \in \Omega$

  $$\Rightarrow Lu(x_0) = \underbrace{\Delta u(x_0)}_{\leq 0} + b\underbrace{\nabla u(x_0)}_{= 0}$$ PERCHÉ P.TO di MAX

  $\Rightarrow Lu(x_0) \leq 0$ ASSURDO □

ANALOGAMENTE si prova:

- LEMMA ②: $Lu < 0 \Rightarrow \min\limits_{\overline{\Omega}} u = \min\limits_{\partial\Omega} u$

- PROCEDIAMO ORA ALLO SVOLGIMENTO DELL'ESERCIZIO.

CONSIDERO $v = e^{x_1 \operatorname{sgn}(b_1)} - M$, con M scelto da avere $v < 0$ su $\overline{\Omega}$;

valgono: $\begin{cases} \Delta u = e^{x_1 \operatorname{sgn}(b_1)} > 0 \\ b\nabla u = b_1 e^{x_1 \operatorname{sgn}(b_1)} \cdot \operatorname{sgn}(b_1) > 0 \\ v < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Lv > 0 \\ v < 0 \end{cases}$

CONSIDERIAMO ORA $\varepsilon > 0$ e CONSIDERIAMO $L(u + \varepsilon v) = \underbrace{Lu}_{= 0} + \varepsilon Lv = \varepsilon Lv > 0$

$\Rightarrow \forall x \in \overline{\Omega} \quad (u + \varepsilon v)(x) \overset{①}{\leq} \max\limits_{\partial\Omega}(u + \varepsilon v) \leq \max\limits_{\partial\Omega} u$, POICHÉ $v < 0 \Rightarrow u + v < u$

$\Rightarrow u(x) + \varepsilon v(x) \leq \max\limits_{\partial\Omega} u \quad \forall x \in \overline{\Omega} \quad \forall \varepsilon > 0$

SE $\varepsilon \to 0$, LA DISUGUAGLIANZA DIVENTA $u(x) \leq \max\limits_{\partial\Omega} u \quad \forall x \in \overline{\Omega}$

IN PARTICOLARE, $\max\limits_{\overline{\Omega}} u(x) \leq \max\limits_{\partial\Omega} u$

MA OVVIAMENTE $\max\limits_{\partial\Omega} u \leq \max\limits_{\overline{\Omega}} u$

$\Rightarrow \max\limits_{\partial\Omega} u = \max\limits_{\overline{\Omega}} u$

ANALOGAMENTE SI MOSTRA PER IL MINIMO, USANDO ② □

13] Sia $u \in C^2(\mathbb{R})$, tale che $\Delta u \geq 0$. Se $\limsup_{|y| \to +\infty} u(y) \leq 0$

$\Rightarrow \sup u \leq 0$

SVOLGIMENTO:

Supponiamo, PER ASSURDO, che $\sup u > 0$: QUESTO SIGNIFICA CHE $\exists x_0$ tale che $u(x_0) > 0$.

CONSIDERO UNA PALLA di RAGGIO $r_1 > |x_0|$ e CENTRO 0:

SU $\overline{B(0, r_1)}$, ~~QUESTA~~ u ASSUME max (PER WEIERSTRASS) E PER PRINC. max. debole: $\max_{\partial B(0,r_1)} u = \max_{\overline{B(0,r_1)}} u \geq u(x_0) > 0$.

PRENDIAMO UNA SUCCESSIONE $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$, CON $r_{n+1} = 2 \cdot r_n$ (r_1 è DATO)

$$\Rightarrow \max_{\partial B(0, r_{k+1})} u = \max_{\overline{B(0, r_{k+1})}} u \geq \max_{\overline{B(0, r_k)}} u = \max_{\partial B(0, r_k)} u \quad (\geq u(x_0) > 0)$$

$\Rightarrow$ LA SUCCESSIONE $\left(\max_{\partial B(0,r_n)} u\right)_{n \in \mathbb{N}}$ è NON-DECRESCENTE

$$\sup_{|y| \geq r_k} u(y) \geq \sup_{\partial B(0, r_k)} u \geq \max_{\partial B(0, r_k)} u \geq u(x_0) > 0$$

PERCHÉ $\{|y| \geq r_k\} \supseteq \partial B(0, r_k)$

PERCHÉ $\sup_A \geq \max_A$

QUINDI, TUTTI GLI ELEMENTI DELLA SUCC. $\left(\sup_{|y| \geq r_n} u(y)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ SONO POSITIVI E MAGGIORI DI $u(x_0)$

$$\limsup_{|y| \to +\infty} u(y) = \inf_n \left(\sup_{|y| \geq r_n} u(y)\right)$$

MA L'INF di UNA SUCCESSIONE di NUMERI ~~POSITIVI~~ MAGGIORI DI $u(x_0)$ È MAGGIORE O UGUALE DI $u(x_0)$

$\Rightarrow \limsup_{|y| \to +\infty} u(y) \geq u(x_0) > 0$ ASSURDO (PER IPOTESI È ≤ 0)

$\Rightarrow \sup u \leq 0$. $\square$