$$I_3 \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} - \int_{B(x,r)} \langle A \nabla \Gamma(x-y), \nabla u(y) \rangle_E \, dy$$

Da cui:

$$u(x) = \int_{\partial B(x,r)} \langle A \nabla \Gamma(x-y), \nu(y) \rangle_E \, u(y) \, d\sigma(y) - \int_{B(x,r)} \langle A \nabla \Gamma(x-y), \nabla u(y) \rangle_E \, dy.$$

ESERCIZIO 2)

Ω aperto, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ è soluzione di $Lu = 0$ dove

$L = \Delta u + b \nabla u = \sum_{i=1}^{n} \partial^2_{ii} u + \sum_{i=1}^{n} b_i \partial_i u$

Devo provare che u assume massimo e minimo sull $\partial \Omega$.

Proviamo, inizialmente, il seguente:

Lemma

Ω è aperto e limitato, $u \in C^2(\bar{\Omega}) \cap C(\Omega)$ con $Lu > 0$

Allora

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial \Omega} u$$

Dim

Sia $x_0 \in \bar{\Omega}$ un punto di massimo.

Supponiamo, per assurdo, che $x_0 \notin \partial \Omega$, da cui $x_0 \in \Omega$

Poiché x_0 è un punto di massimo si ha che:

$$\partial_i u(x_0) = 0$$

$$\partial^2_{ij} u(x_0) \leq 0$$

Da cui $Lu(x_0) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{ii} u(x_0) + b \sum_i \partial_i u(x_0) \leq 0$ (ASSURDO, poiché per ipotesi $Lu > 0$)

$\forall \varepsilon > 0$, considero la funzione: $v(x) := u(x) + \varepsilon w(x)$

Dove $w(x) := \frac{x}{b}$

Considero ora

$$Lv = \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{Lu} \text{ per ipotesi} + \varepsilon L w = \varepsilon \cancel{b} \sum_{i=1}^{n} \partial_i \left(\frac{x_i}{\cancel{b}} \right) = \varepsilon n > 0 \quad \text{in } \Omega$$

Utilizzo il lemma precedente, da cui

$$(u + \varepsilon w)(x) \leq \max_{\partial \Omega} (u + \varepsilon x) \leq \max_{\partial \Omega} u + \varepsilon \xi \qquad \forall x \in \bar{\Omega} \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Big\downarrow \ \varepsilon \to 0$$

$$u(x) \leq \max_{\partial \Omega} u \qquad \forall x \in \bar{\Omega}$$