$\Rightarrow$ $u(x)$ ammette massimo sulla frontiera di Ω.

Posso fare lo stesso ragionamento con il minimo, tenendo in conto che:

$$\min_{\partial\Omega} u = -\max_{\partial\Omega}(-u).$$

ESERCIZIO 3)

Vogliamo dimostrare che $u(x) \leq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, se succede questo il teorema è vero.

Consideriamo $B(0,r)$ un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$.

Supponiamo, per assurdo, che $\exists x_0 \in B(0,r) \subseteq \mathbb{R}^n$ t.c. $u(x_0) > 0$

Possiamo applicare su $B(0,r)$ il principio di massimo debole, da cui u ammette massimo su $\partial B(0,r)$

$$\Rightarrow \max_{\overline{B(0,r)}} u = \max_{\partial B(0,r)} u \geq u(x_0)$$

Considero un ricoprimento aperto di $\mathbb{R}^n$: $\mathcal{A} = \{B(0,R)_R$ con $R \in \mathbb{N}$ e $r < R\}$

Su $\mathcal{A}$ vale ancora il principio di massimo debole: $\max_{\overline{B(0,R)}} u = \max_{\partial B(0,R)} u \geq u(x_0)$ $\forall R \in \mathbb{N}$, $r<R$

Considerando il limite $R \to +\infty$, dunque $\max u \geq u(x_0)$

Per ipotesi:

$$\limsup_{|y|\to+\infty} u(y) \leq 0 \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

?

$$\Downarrow$$

pongo $\varepsilon = \frac{x_0}{2}$

$$u(y) \leq 0 \Rightarrow u(y) \leq \varepsilon \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

$$\Downarrow$$

$$\max u \leq \varepsilon = \frac{x_0}{2}$$ (ASSURDO) poiché $\max u \geq u(x_0) > 0$