ESERCIZI ANALISI APPLICATA 14/03/2019 SOFIA RICCI

ESERCIZIO 1

$$L = \sum_{i,j} a_{ij} \partial^2_{i,j} u \quad , \quad A = (a_{ij}) \text{ definita positiva}$$

$u \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto

Considero $B(x,\varepsilon)$ sfera inclusa in Ω.
L ha soluzione fondamentale Γ:

$$L\Gamma = \delta \Rightarrow \int_{B(x,\varepsilon) \setminus B(x,r)} L\,\Gamma(x-y)\, u(y)\, dy = 0$$

con $\varepsilon > r$

$$\Rightarrow \int_{B(x,\varepsilon)\setminus B(x,r)} \Sigma_{ij}\, a_{ij}\, \partial^2_{ij} \Gamma(x-y)\, u(y)\, dy = 0$$

integro per parti

$$\int_{B(x,\varepsilon)\setminus B(x,r)} \Sigma_{ij}\, a_{ij}\, \partial^2_{ij} \Gamma(x-y)\, u(y)\, dy =$$

$$= \underbrace{\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \Sigma_{ij}\, a_{ij}\, \partial_j \Gamma(x-y)\, u(y)\, \nu(y)\, d\sigma(y)}_{I_1} + \underbrace{\int_{\partial B(x,r)} \Sigma_{ij}\, a_{ij}\, \partial_j \Gamma(x-y)\, \nu_{est}(y)\, u(y)\, d\sigma(y)}_{I_2}$$

$$- \underbrace{\int_{B(x,\varepsilon)\setminus B(x,r)} \Sigma_{ij}\, a_{ij}\, \partial_i u(y)\, \partial_j \Gamma(x-y)\, dy}_{I_3} = 0$$

$$I_1 = \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \langle A \nabla\Gamma(x-y), \nu \rangle_E\, u(y)\, d\sigma(y)$$

$$I_2 = -\int_{\partial B(x,r)} \sum a_{ij} \nabla\Gamma(x-y)\, \nu(y)\, u(y)\, d\sigma(y) \longrightarrow -u(x)$$

per $r \to 0$

Per ipotesi $\varepsilon > r$ e

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \langle A\nabla\Gamma(y), \nu(y)\rangle_E \, d\sigma(y) = 1$$

$$I_3 \underset{r\to 0}{=} \int_{B(x,\varepsilon)} \langle A\nabla\Gamma(x-y), \nabla u(y)\rangle_E \, dy .$$

$$\Rightarrow \quad u(x) = \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \langle A\nabla\Gamma(x-y), \nu\rangle_E \, u(y)\, d\sigma(y) - \int_{B(x,\varepsilon)} \langle A\nabla\Gamma(x-y), \nabla u(y)\rangle_E \, dy .$$

ESERCIZIO 2

$Lu = \Delta u + b\nabla u$, b vettore costante

$u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$, Ω aperto

u è soluzione di $Lu = 0$

$x = (x_1, \dots x_n)$ $\quad \left(Lv = (x\cdot b)^2 e^{x\cdot b} + x\cdot b^2 e^{x\cdot b} > 0 \right)$

calcolo di Lv non corretto

$$v = e^{x\cdot b} - M \quad \text{t.c.} \begin{cases} Lv > 0 \\ v < 0 \quad \text{per la scelta di } M \end{cases}$$

$$L(u+\varepsilon v) = Lu + \varepsilon Lv =$$

$$= 0 + \varepsilon Lv > 0$$

$\Rightarrow$ questo mi dice che $(u+\varepsilon v)(x) \le \max_{\partial\Omega} (u+\varepsilon v) \quad \forall x \in \bar\Omega$

ma $\max_{\partial\Omega} (u+\varepsilon v) \le \max_{\partial\Omega} u$ perchè $v < 0$ per costruzione.

$\forall x \in \bar{\Omega}$
$\forall \varepsilon > 0$ $\quad u(x) + \varepsilon v(x) \leq \max_{\partial\Omega} u$

per $\varepsilon \to 0$, $\quad u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u \quad \forall x \in \bar{\Omega}$.

Analogamente per il minimo.

ESERCIZIO 3

$u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ t.c. $\Delta u \geq 0$

Tesi : Se $\lim_{|y| \to +\infty} \sup u(y) \leq 0 \Rightarrow \sup u \leq 0$.

Se $u(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$ vale la tesi per il principio di massimo debole. Altrimenti $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n$ t.c. $u(x_0) > 0$.
Considero $B(x_0, r)$ su cui $u(x) > 0$ e, poichè u continua, per Weierstrass $\max u \in \partial B(x_0, r)$.

Per R sufficientemente grande, $\lim_{|y| \to +\infty} \sup u(y) \leq 0$ in $B(x_0, R)$.
Allora considero la successione non decrescente r_n a cui corrisponde $B(x_0, r_n)$, successione di palle di raggio crescente r_n,

$$\Rightarrow \max_{\partial B(x_0, r_n)} u \leq \max_{\partial B(x_0, r_{n+1})} u .$$

Ora $\sup u \geq \max_{\partial B(x_0, r_n)} u \geq u(x_0) > 0$
Passando all'inf $\Rightarrow \inf \sup u > 0$, ma $\inf \sup u =$

$= \lim_{|y| \to +\infty} \sup u \leq 0$ Assurdo.