Esercizi assegnati: soluzione fondamentale e principio del massimo

Tiziano Todeschi

9 marzo 2019

1 Esercizio 1

Dato l'operatore $L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial_{x_i,x_j}}$, con $A = (a_{i,j})$ simmetrica definita positiva, esiste una soluzione fondamentale Γ_L per l'operatore L.
Allora vale $L\Gamma_L(x-y) = 0$ per $y \neq x$. Prendiamo la palla B(x,r) in modo che sia contenuta in Ω, e sia $u \in C^2(\Omega)$. Otteniamo:

$$0 = \int_{B(x,r)\setminus B(x,\epsilon)} L\Gamma_L(x-y)u(y)dy = \int_{B(x,r)\setminus B(x,\epsilon)} \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \frac{\partial^2 \Gamma_L(x-y)}{\partial_{y_i,y_j}} u(y)dy =$$

Usiamo il teorema della divergenza:

$$= \int_{\partial(B(x,r)\setminus B(x,\epsilon))} \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{i,j} \frac{\partial \Gamma_L(x-y)}{\partial_{y_i}} \nu_j(y) \right) u(y) d\sigma(y)$$
$$- \int_{(B(x,r)\setminus B(x,\epsilon)} \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{i,j} \frac{\partial \Gamma_L(x-y)}{\partial_{y_i}} \frac{\partial u(y)}{\partial_{y_j}} \right) dy$$

Ma dato che $(a_{i,j}) = A$

- $\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \frac{\partial \Gamma_L(x-y)}{\partial_{y_i}} \nu_j(y) =< A\nabla\Gamma_L(x-y), \nu(y) >$
- $\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \frac{\partial \Gamma_L(x-y)}{\partial_{y_i}} \frac{\partial u(y)}{\partial_{y_j}} =< A\nabla\Gamma_L(x-y), \nabla u(y) >$

Dunque andiamo a sostituire e otteniamo:

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{\partial B(x,r)} < A\nabla\Gamma_L(x-y), \nu(y) > u(y) d\sigma(y) \\
&- \int_{\partial B(x,\epsilon)} < A\nabla\Gamma_L(x-y), \nu(y) > u(y) d\sigma(y) \\
&- \int_{(B(x,r)\setminus B(x,\epsilon)} < A\nabla\Gamma_L(x-y), \nabla u(y) > dy \\
&= I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}
$$

Vediamo subito che $I_3 \to -\int_{(B(x,r)} < A\nabla\Gamma_L(x-y), \nabla u(y) > dy$ per $\epsilon \to 0^+$ perchè:

non capisco

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{B(x,r)\setminus B(x,\epsilon)} < A\nabla\Gamma_L(x-y), \nabla u(y) > dy \right| &\leq \|\nabla u\|_{L^\infty(B(x,r))} \frac{c_1}{\epsilon^{n-1}} \int_{B(x,\epsilon)} dy = \\
&= \|\nabla u\|_{L^\infty(B(x,r))} \frac{c_1}{\epsilon^{n-1}} c_2 \epsilon^n = C\epsilon \to 0
\end{aligned}
$$

Dato che $\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\partial B(x,\epsilon)} < A\nabla\Gamma_L(x-y), \nu(y) > d\sigma(y) = 1$, allora

$$
\int_{\partial B(x,\epsilon)} < A\nabla\Gamma_L(x-y), \nu(y) > d\sigma(y) = \frac{\int_{\partial B(x,\epsilon)} < A\nabla\Gamma_L(x-y), \nu(y) > u(y) d\sigma(y)}{\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\partial B(x,\epsilon)} < A\nabla\Gamma_L(x-y), \nu(y) > d\sigma(y)}
$$

dunque mandando al limite per $\epsilon \to 0^+$ otteniamo

non capisco

$$
I_2 \to -\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{\int_{\partial B(x,\epsilon)} < A\nabla\Gamma_L(x-y), \nu(y) > u(y) d\sigma(y)}{\int_{\partial B(x,\epsilon)} < A\nabla\Gamma_L(x-y), \nu(y) > d\sigma(y)}
$$

Ma quest'ultimo termine rappresenta una formula di media per $u(y)$ sul disco $\partial B(x,\epsilon)$, possiamo riscrivere allora definendo, fissato x, la misura

$$
d\mu(y) :=< A\nabla\Gamma_L(x-y), \nu(y) > d\sigma(y)
$$

e otteniamo

$$
\frac{\int_{\partial B(x,\epsilon)} < A\nabla\Gamma_L(x-y), \nu(y) > u(y) d\sigma(y)}{\int_{\partial B(x,\epsilon)} < A\nabla\Gamma_L(x-y), \nu(y) > d\sigma(y)} = \frac{\int_{\partial B(x,\epsilon)} u(y) d\mu(y)}{\int_{\partial B(x,\epsilon)} d\mu(y)} \longrightarrow_{\epsilon\to 0^+} u(x)
$$

Dunque per $\epsilon \to 0^+$ abbiamo che $I_2 \to -u(x)$ e perciò vale la formula di rappresentazione

$$
u(x) = \int_{\partial B(x,r)} < A\nabla\Gamma_L(x-y), \nu(y) > u(y) d\sigma(y) - \int_{B(x,r)} < A\nabla\Gamma_L(x-y), \nabla u(y) > dy
$$

2 Esercizio 2

Sia $Lu = \Delta u + b \cdot \nabla u$, se u è tale che $Lu > 0$ su Ω, allora u assume massimo sulla frontiera di Ω.
Infatti, supponiamo per assurdo che assuma massimo all'interno di Ω, in un punto x_0. Allora
$\begin{cases} \nabla u(x_0) = 0 \\ \Delta u(x_0) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow Lu(x_0) \leq 0$ da cui l'assurdo.
Allo stesso modo si dimostra che se $Lu < 0$ su Ω, allora u assume minimo sulla frontiera di Ω.

Se invece $Lu \geq 0$ su Ω, definiamo la funzione $v := e^{b_i x_i}$, prendendo $b_i \neq 0$, e osserviamo che $Lv = b_i^2 e^{b_i x_i} + b_i^2 e^{b_i x_i} = 2b_i^2 e^{b_i x_i} > 0$ su Ω.
Allora $L(u + \epsilon v) > 0$, e per quanto mostrato prima, otteniamo

$$\max_{\Omega}(u + \epsilon v) \leq \max_{\partial\Omega}(u + \epsilon v)$$

Dato che ϵ è arbitrario, passiamo al limite per $\epsilon \to 0^+$ e otteniamo

$$\max_{\Omega} u \leq \max_{\partial\Omega} u$$

Allo stesso modo si dimostra, prendendo $v := -e^{b_i x_i}$, che se $Lu \leq 0$ allora

$$\min_{\Omega} u \geq \min_{\partial\Omega} u$$

Dunque se $Lu = 0$:

$$\begin{cases} Lu \geq 0 \\ Lu \leq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u \\ \min_{\Omega} u \geq \min_{\partial\Omega} u \end{cases}$$

Dunque u assume massimo e minimo sulla frontiera di Ω.

3 Esercizio 3

Supponiamo per assurdo che esista un punto x_0 tale che $u(x_0) > 0$. Allora, dato che $\limsup_{|y|\to+\infty} u(y) \leq 0$, per ogni ϵ piccolo a piacere esiste un $\delta_\epsilon > 0$ tale che se x sta fuori dalla palla $B(x_0, \delta_\epsilon)$, vale $u(x) < \epsilon$.

Scegliamo $\epsilon = \frac{u(x_0)}{2}$ e poniamo $\delta_{\frac{u(x_0)}{2}} = \delta$ e consideriamo la palla $B(x_0, \delta)$. Dato che al suo interno $\Delta u \geq 0$, il massimo di u sulla palla è raggiunto sul bordo. Ma fuori dalla palla $u(x) < \frac{u(x_0)}{2}$, quindi per la continuità di u la disuguaglianza vale anche sul bordo. Allora:

$$\frac{u(x_0)}{2} < \max_{B(x_0,\delta)} u \leq \max_{\partial B(x_0,\delta)} u \leq \frac{u(x_0)}{2}$$

da cui l'assurdo, perciò $u(x) \leq 0$ su $\mathbb{R}^n$ e perciò $\sup_{\mathbb{R}^n} u(x) \leq 0$