GUIDO FIORILLO

ES. 3

Sia $L = \sum_{i,j} a_{ij} \partial^2_{ij}$ con $(a_{ij}) = A$ ~~due~~ simmetrica definita positiva. Se Γ_L è soluzione fondamentale per L, mostrare che $\forall u \in C^2(\Omega)$ e $\forall B_{A^{-1}}(x,r) \subseteq \Omega$, vale

$$u(x) = \int_{\partial B_{A^{-1}}(x,r)} u(y) \langle A \nabla \Gamma_L(x-y), A\nu \rangle_{A^{-1}} \, d\sigma(y) - \int_{B_{A^{-1}}(x,r)} \langle A \nabla \Gamma_L(x-y), A \nabla u(y) \rangle_{A^{-1}} \, dy$$

SVOLGIMENTO

Poiché Γ_L è soluzione fondamentale, $L\Gamma_L(x-y) = 0 \ \forall y \neq x$.

Se $\varepsilon < r$, considero $\Omega_\varepsilon = B_{A^{-1}}(x,r) \setminus B_{A^{-1}}(x,\varepsilon)$. Allora ~~$L\Gamma_L|_{\Omega_\varepsilon} \equiv 0$, da cui~~ $L\Gamma_L(x-y) = 0$ per $y \in \Omega_\varepsilon$, da cui:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} u(y) L\Gamma_L(x-y) \, dy = 0. \qquad [1]$$

Integrando per parti, ho che $\int_{\Omega_\varepsilon} u(y) L\Gamma_L(x-y) \, dy =$

$$\int_{\Omega_\varepsilon} u(y) \sum_{i,j} a_{ij} \partial_{ij} \Gamma_L(x-y) \, dy = \int_{\partial \Omega_\varepsilon} u(y) \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \partial_j \Gamma_L(x-y) \nu_i \right) d\sigma(y)$$

$$- \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\sum_{i,j} a_{ij} \partial_j \Gamma_L(x-y) \partial_i u \right) dy = I_1 + I_2.$$

Ma $\partial \Omega_\varepsilon = \partial B_{A^{-1}}(x,r) \cup \partial B_{A^{-1}}(x,\varepsilon)$, dove la normale esterna a Ω_ε su $\partial B_{A^{-1}}(x,\varepsilon)$ è opposta alla normale esterna di $B_{A^{-1}}(x,\varepsilon)$. Considerando questo, ottengo: