GUIDO FIORILLO

Es. 2

Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $\Delta u \geq 0$ in $\mathbb{R}^n$, $\limsup_{|x| \to +\infty} u(x) \leq 0$. Allora $\sup_{\mathbb{R}^n} u \leq 0$

SVOLGIMENTO

Suppongo per assurdo che $\sup_{\mathbb{R}^n} u > 0$. Allora $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $u(x_0) > 0$. Poiché $\limsup_{|x| \to +\infty} u(x) \leq 0$, $\exists M > 0$ t.c., se $|x| > M$, $u(x) < \frac{u(x_0)}{2}$. In particolare, deve essere $|x_0| \leq M$. Ora pongo $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } |x| < M\}$. $u \in C^2(\Omega)$ e $\Delta u \geq 0$ in Ω, $u \in C(\overline{\Omega})$. Applicando il principio di massimo, ottengo che $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$. Ma $\overline{\Omega} = \{x \in \mathbb{R}^n, \text{ t.c. } |x| \leq M\}$, per cui $\max_{\overline{\Omega}} u \geq u(x_0)$. D'altra parte, $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| = M\}$ e, per continuità, deve verificarsi $\max_{\partial\Omega} u \leq \frac{u(x_0)}{2}$.

Abbiamo provato $u(x_0) \leq \frac{u(x_0)}{2}$, da cui deriva $u(x_0) = 0$, contro l'assunzione $u(x_0) > 0$ e questo è assurdo.