ES. 1

Sia $Lu = \Delta u + b \cdot \nabla u$, con b vettore costante. Se Ω è aperto e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ è soluzione di $Lu = 0$, provare che u assume massimo e minimo sulla frontiera

SVOLGIMENTO

Supponiamo che $Lu > 0$ in Ω. Allora, sia x_0 punto di massimo per u in $\overline{\Omega}$. Se $x_0 \in \partial\Omega$, abbiamo finito. Altrimenti $x_0 \in \Omega$.

In tal caso, $\Delta u(x_0) \leq 0$ e $\nabla u(x_0) = 0$, da cui $Lu(x_0) = \Delta u(x_0) + b \cdot \nabla u(x_0) \leq 0$, il che è assurdo, perché abbiamo supposto $Lu > 0$ in Ω.

Se $Lu = 0$ in Ω, consideriamo la funzione $v = e^{\lambda x_1}$.

Abbiamo $\Delta v = \lambda^2 e^{\lambda x_1}$ e $b \cdot \nabla u = \lambda b_1 e^{\lambda x_1}$.

Allora $Lv = \Delta v + b \cdot \nabla u = e^{\lambda x_1}[\lambda^2 + \lambda b_1] =$ $\lambda e^{\lambda x_1}(\lambda + b_1)$. Se scelgo $\lambda > |b_1|$, $\lambda e^{\lambda x_1}(\lambda + b_1) > 0$, dunque $Lv > 0$ in Ω. Inoltre, noto che $v > 0$ in Ω.

Se prendo $M > \max_{\overline{\Omega}} v$, $\tilde{v} = v - M$ è tale che $L\tilde{v} > 0$ in Ω e $\tilde{v} < 0$ in Ω. Allora, considerando $u + \varepsilon v$, ho che $L(u + \varepsilon\tilde{v}) = Lu + \varepsilon L\tilde{v} = \varepsilon L\tilde{v} > 0$, per cui $\forall x \in \overline{\Omega}$,

$$(u + \varepsilon\tilde{v}) \leq \max_{\partial\Omega}(u + \varepsilon\tilde{v}) \leq \max_{\partial\Omega} u \quad \left(\text{perché } \tilde{v} < 0\right)$$

Mandando $\varepsilon \to 0$ ottengo

$$u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u \quad \forall x \in \Omega, \text{ da cui}$$