Esercizio 1

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$ simmetrica, definita positiva, a coefficienti costanti. Sia Ω un aperto di R^n e sia u una funzione di classe $C^2(\Omega \times \mathbb{R}^+, R)$, soluzione dell'equazione

$$\partial_t u = \sum_{ij} a_{ij} \partial^2_{ij} u \tag{1}$$

Determinare una matrice $n \times n$ V invertibile tale che posto

$$v(y,t) = u(Vy,t),$$

v sia soluzione dell'equazione

$$\partial_t v = \Delta v. \tag{2}$$

Verificare anche che, se v e' una funzione di classe C^2 soluzione di (2), allora

$$u(x,t) = v(V^{-1}x,t)$$

e' soluzione di (1).

Esercizio 2 Sia L l'operatore definito

$$Lu = \partial_t u - \sum_{ij} a_{ij} \partial^2_{ij} u, \tag{3}$$

con a_{ij} simmetrica, definita positiva e a coefficienti costanti. Usando il risultato dell'esercizio 1, determinare una funzione Γ_A tale che

$$L\Gamma_A(x,t) = 0, \tag{4}$$

in $R^n \times]0,\infty[$ e tale che

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_A(x,t)dx = 1$$

per ogni $t > 0$

Esercizio 3

Sia L come sopra, e Γ_A la funzione determinata nell'esercizio 2. Sia poi g una funzione continua e a supporto compatto in $\mathbb{R}^n$, e sia

$$u(x,t) = \int \Gamma_A(x-y,t)g(y)dy$$

Verificare, derivando direttamente u, che e' soluzione del problema

$$Lu(x,t) = 0, (x,t) \in R^n \times]0,\infty[, \qquad u(x,0) = g(x),\ x \in R^n$$

Esercizio 4

Sia L come sopra, e Γ_A la funzione determinata nell'esercizio 2. Sia poi f una funzione di classe C^2 a supporto compatto in $R^n\times]0,\infty[$, e

$$u = \int\int \Gamma_A(x-y,t-\tau)f(y,\tau)dyd\tau.$$

Verificare direttamente (derivando u) che e' soluzione del problema

$$Lu(x,t) = f(x,t), (x,t) \in R^n\times]0,\infty[, \qquad u(x,0) = 0, \; x \in R^n$$

Esercizio 5

Sia

$$\Gamma = \frac{e^{\frac{-|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}}$$

la soluzione fondamentale dell'equazione del calore in $R^n\times]0,\infty[$.

Indicare $U((x,t),R)$ un insieme di livello della soluzione fondamentale

$$U((x,t),R) = \{(x,t) : \frac{1}{\Gamma(x,t)} \leq R^{N-2}\}, \quad N = n+2$$

Provare la seguente formula di rappresentazione per funzioni regolari sugli insiemi di livello della soluzione fondamentale

$$u(x,t) = \int_{\partial U((x,t),R)} \partial_{x_i}\Gamma(x-y,t-y)\nu_i(y,\tau)u(y,\tau)d\sigma(y,\tau)+$$

$$+\int_{U((x,t),R)} \Big(\Gamma(x-y,t-y) - \frac{1}{R^{N-2}}\Big)Lu(y,\tau)dyd\tau$$

Esercizio 6

Sia ora Γ_A la soluzione fondamentale dell'operatore (4). Indicare $U_A((x,t),R)$ un insieme di livello della soluzione fondamentale

$$U_A((x,t),R) = \{(x,t) : \frac{1}{\Gamma_A(x,t)} \leq R^{N-2}\}, \quad N = n+2$$

Provare un'analoga formula di rappresentazione sugli insiemi di livello della soluzione fondamentale

$$u(x,t) = \int_{\partial U_A((x,t),R)} a_{ij}\partial_{x_i}\Gamma_A(x-y,t-y)\nu_j(y,\tau)u(y,\tau)d\sigma(y,\tau)+$$

$$+\int_{U_A((x,t),R)} \Big(\Gamma_A(x-y,t-y) - \frac{1}{R^{N-2}}\Big)Lu(y,\tau)dyd\tau$$

Esercizio 7

Dedurre la seguente formula di media solida per soluzioni di classe C^2 dell'equazione $Lu = 0$

$$u(x,t) = C \int_{U_A((x,t),R)} \frac{a_{ij}\partial_{x_i}\Gamma_A(x-y,t-\tau)\partial_{x_j}\Gamma_A(x-y,t-\tau)}{\Gamma_A^2(x-y,t-\tau)} u(y,\tau)dyd\tau$$

Esercizio 8

Si dice che $u \in C^2_x(\Omega \times]0,T]$ e' sottosoluzione dell'equazione del calore se

$$u_t \leq \Delta u \quad in]0,T]$$

Provare che una sottosoluzione verifica la seguente diseguaglianza

$$u(x,t) \leq \int_{U((x,t),R)} \frac{|\nabla\Gamma(x-y,t-\tau)|^2}{\Gamma^2(x-y,t-\tau)} u(y,\tau)d\sigma(y,\tau)$$

verificare inoltre il principio di massimo debole per le sottosoluzioni.

Esercizio 9

Scrivere una formula di rappresentazione esplicita per le soluzioni del problema di Cauchy

$$\partial_t u = a\partial_{xx}u + bu_x + cu, \; x \in \mathbb{R}, \; t > 0 \qquad u(x,0) = g(x) \, x \in \mathbb{R}$$

dove a, b, c sono coefficienti costanti. Provare che, se $c < 0$ e g e' limitata allora $u(x,t) \to 0$ as $t \to +\infty$ (Hint: si scelga h, k tali che $v(x,t) = u(x,t)e^{hx+kt}$ e' soluzione dell'equazione del calore

Esercizio 10 Sia Ω un aperto limitato. Utilizzando il fatto che se una successione $(u_k)_k$ converge debolmente ad una funzione u in $W^{12}_0(\Omega)$ si ha

$$\int_\Omega |Du|^2 \leq \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega |Du_k|^2,$$

provare che esiste

$$\min_{u \in W^{1,2}_0(\Omega), \; ||u||_{L^2}=1} \int_\Omega |Du|^2$$