1. Esercizi sulla soluzione fondamentale

Esercizio 1 Se f e' di classe C^2 a supporto compatto, Γ e' la soluzione fondamentale dell'operatore di Laplace, allora $u = \Gamma * f$ e' una funzione di classe C^2, soluzione di

$$\Delta u = f.$$

Esercizio 2 Trovare la soluzione fondamentale Γ_ϵ dell'operatore

$$L_\epsilon u = \partial_{xx} u + \epsilon^2 \partial_{yy} u$$

Esercizio 3 Trovare gli insiemi di livello della soluzione fondamentale Γ_ϵ individuata nell'esercizio 1 e determinarne il limite per $\epsilon \to 0$

Esercizio 4 Sia L l'operatore definito

$$L = \partial_{xx} u,$$

in R^2, dove le variabili sono denotate (x, y). Provare che l'operatore non e' ipoellittico (ovvero che esiste una funzione $f \in C_0^\infty$ tale che $Lu = f$, ma u non e' di classe C^∞.

Esercizio 5 Sia L_A l'operatore definito

$$L_A u = \sum_{ij} a^{ij} \partial^2_{ij} u, \tag{1.1}$$

con a^{ij} simmetrica, definita positiva e a coefficienti costanti. Sia Ω un aperto di R^n e sia u una funzione di classe $C^2(\Omega, R)$, soluzione dell'equazione

$$L_A u(x) = f(x) \tag{1.2}$$

Determinare una matrice $n \times n$ V invertibile tale che posto

$$v(y) = u(Vy),$$

v sia soluzione dell'equazione

$$\Delta v(y) = f(Vy). \tag{1.3}$$

Esercizio 6 Verificare anche che, se v e' una funzione di classe C^2 soluzione di (1.3), allora

$$u(x) = v(V^{-1}x)$$

e' soluzione di (1.2).

Esercizio 7 Sia L_A l'operatore definito in (1.1) con a^{ij} simmetrica, definita positiva e a coefficienti costanti. Usando il risultato degli esercizi 5-6, determinare la soluzione fondamentale per l'operatore L_A.

Esercizio 8 Verificare che la soluzione fondamentale verifica le seguenti proprietá:

- i) $L_A \Gamma_A = \delta$
- ii) $|\Gamma_A| \leq \frac{C}{||x||^{n-2}}$, $|\nabla \Gamma_A| \leq \frac{C}{||x||^{n-1}}$, $|\partial_{ij} \Gamma_A| \leq \frac{C}{||x||^n}$.
- iii) Poiche' A e' simmetrica definita positiva la sua inversa, definisce un prodotto scalare, indicato con $< \cdot, \cdot >_{A^{-1}}$. Le sfere si possono allora rappresentare nella forma

$$B_{A^{-1}}(x, R) = \{y : \frac{1}{\Gamma_A(x-y)} \leq r^{n-2}\}$$

Esercizio 9 Provare che, se una funzione di classe $C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ verifica $L_A \Gamma_A = \delta$ allora

$$lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial B_{A^{-1}}(x,\epsilon)} < A \nabla \Gamma_A(x-y), A\nu(y) >_{A^{-1}} d\sigma(y) = 1$$

Hint: applicare la condizione i) con una funzione $\phi \in C_0^\infty$ che sia identicamente uguale ad 1 in un intorno di x, e quindi su ogni sfera $B_{A^{-1}}(x,\epsilon)$, con ϵ piccolo. Poi integrare per parti

2. Esercizi sulla formula di rappresentazione

Esercizio 10 Formula di rappresentazione sugli aperti regolari limitati. Sia u una funzione di classe $C^2(U)$, e sia Ω un aperto di classe C^1 tale che $\bar{\Omega} \subset U$. Provare che u verifica

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} < \nabla \Gamma(x-y), \nu > u(y) d\sigma(y) - \int_\Omega < \nabla \Gamma(x-y), \nabla u(y) > dy$$

Esercizio 11 Formula di rappresentazione sugli aperti regolari limitati. Sia u una funzione di classe $C^2(U)$, e sia Ω un aperto di classe C^1 tale che $\bar{\Omega} \subset U$. Fissato $x \in \Omega$, provare che u verifica

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} < \nabla \Gamma(x-y), \nu > u(y) d\sigma(y) -$$
$$- \int_{\partial\Omega} < \nabla u(y), \nu > \Gamma(x-y) d\sigma(y) + \int_\Omega \Gamma(x-y) \Delta u(y) dy$$

Esercizio 12 Formula di rappresentazione per operatori uniformemente ellittici. Sia L_A l'operatore definito in (1.1) Sia u una funzione di classe $C^2(U)$. Provare che u verifica

$$u(x) = \int_{\partial B_{A^{-1}}(x,r)} < A \nabla \Gamma(x-y), A\nu >_{A^{-1}} u(y) d\sigma(y) -$$
$$- \int_{B_{A^{-1}}(x,r)} < A \nabla \Gamma_A(x-y), A \nabla u(y) >_{A^{-1}} dy$$