## 1. Esercizi sul principio di massimo

**Esercizio 1** Indicati $(x, y)$ i punti di $\mathbb{R}^2$, sia $L$ l'operatore $Lu = \partial_{xx}u$ in $\mathbb{R}^2$, sia $\Omega$ aperto in $\mathbb{R}^2$, e sia $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, soluzione dell'equazione

$$Lu = 0 \text{ in } \Omega$$

Provare che $u$ assume massimo e minimo sulla frontiera di $\Omega$.

**Esercizio 2** Dedurre dall'esercizio 1 che se il problema

$$\partial_{xx}u = 0 \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad u_{|\partial\Omega} = g \in C(\partial\Omega)$$

ha soluzione $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, questa e' unica

**Esercizio 3** Sia $A = (a^{ij})$ una matrice $n \times n$ definita positiva e sia

$$L_A = \sum_{ij=1}^{n} a^{ij} \partial^2_{ij} u.$$

Sia $\Omega$ aperto in $\mathbb{R}^n$, sia $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, soluzione dell'equazione $L_A u = 0$. Provare che $u$ allora assume massimo e minimo sulla frontiera di $\Omega$

**Esercizio 4** Stabilire se il risultato dell'esercizio precedente vale anche se la matrice $A$ e' soltanto semidefinita positiva

**Esercizio 5** Sia $Lu = \Delta u + b \cdot \nabla u$, dove $b$ e' un vettore costante in $\mathbb{R}^n$. Se $\Omega$ e' aperto, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, e' soluzione dell'equazione $L_u = 0$, provare che $u$ assume massimo e minimo sulla frontiera di $\Omega$

**Esercizio 6** Sia $Lu = \Delta u + u$, in $\mathbb{R}^n$. Provare che $L$ NON verifica il principio di massimo debole

**Esercizio 7** Sia $Lu = \Delta u - u$, in $\mathbb{R}^n$. Sia $\Omega$ e' aperto, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, soluzione positiva dell'equazione $Lu = 0$. Provare che $u$ assume massimo e minimo sulla frontiera di $\Omega$

**Esercizio 8** Sia $Lu = 2\partial_{xx} + 5\partial_{yy}$, in $\mathbb{R}^2$. Sia $\Omega$ aperto in $\mathbb{R}^2$, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ soluzione di $Lu = 0$. Stabilire se e' vero o falso che, se $u$ assume massino in $\Omega$, allora $u$ e' costante.

**Esercizio 9** Sia $Lu = 2\partial_{xx}$, in $\mathbb{R}^2$. Sia $\Omega$ aperto in $\mathbb{R}^2$, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, soluzione di $Lu = 0$. Dire se $L$ verifica il principio di massimo forte.

**Esercizio 10** Sia $Lu = 2\partial_{xx}$, in $\mathbb{R}^2$. Sia $\Omega$ aperto in $\mathbb{R}^2$, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, soluzione di $Lu = 0$. Dire se $L$ verifica il principio di massimo forte.

**Esercizio 11** Sia $u \in C^2(\overline{\Omega})$ una funzione tale che $-\Delta u \leq 0$. In questo caso $u$ si dice subarmonica. Provare le affermazioni seguenti:

- la funzione $u$ verifica
$$u(x) \leq \fint_{B(x,r)} u(y)dy \quad \forall B(x,r) \subset \Omega$$
- la funzione $u$ assume massimo sulla frontiera di $\Omega$.
- Sia $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa regolare. Se $u$ e' armonica e $v(x) = \phi(u(x))$, allora $v$ e' subarmonica.
- Se $u$ e' armonica, allora $v = |\nabla u|^2$ e' subarmonica.