1. Esercizi

Esercizio 1 Sia u_0 e' di classe C^2, $u_1 \in C^1$ Risolvere il problema seguente con il metodo di separazione di variabili:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & 0 \le x \le \pi \\ u_t(x,0) = u_1(x) & 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

Esercizio 2 Sia u_0 e' di classe C^2, $u_1 \in C^1$ Risolvere il problema seguente con il metodo di separazione di variabili:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & 0 \le x \le \pi \\ u_t(x,0) = u_1(x) & 0 \le x \le \pi \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

Esercizio 3
Considerare il problema, con u_0 di classe C^2 e u_1 di classe C^1

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x \in R, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in R \\ u_t(x,0) = u_1(x) & x \in R \end{cases}$$

- provare che ogni funzione del tipo $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$ e' soluzione dell'equazione
- determinare f e g in modo che u sia soluzione del problema, con un metodo analogo al metodo di D'alambert

Esercizio 4
Considerare il problema

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x \in R, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in R \\ u_t(x,0) = u_1(x) & x \in R \end{cases}$$

Supponiamo che u sia soluzione di classe C^2, e che u_0 e u_1 siano a supporto compatto. Indichiamo

$$k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_t^2(x,t)dx \quad p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2(x,t)dx$$

Provare che
- la funzione $E(t) = k(t) + p(t)$ e' costante
- $k(t) = p(t)$ per t sufficientemente grande

Esercizio 5 Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia (e_k) una base ortonormale di L^2 costituita da autovettori del Laplaciano con condizioni nulle al bordo. Siano $f \in L^2([0,T], L^2(\Omega))$ $u_0 \in W_0^{12}(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$. Per ogni N fissato, indichiamo

$$f_N(t) = \sum_{k=1}^{N} < f(t), e_k >, \quad u_{0,N} = \sum_{k=1}^{N} < u_0, e_k >, \quad u_{1,N} = \sum_{k=1}^{N} < u_1, e_k > .$$

Per ogni N esiste una soluzione u_N del problema

$$\begin{cases} \partial_{tt} u_N = \Delta u_N & x \in \Omega, t > 0 \\ u_N(x,0) = u_{0N}(x) & x \in \Omega \\ \partial_t u_N(x,0) = u_{1N}(x) & x \in \Omega \\ u_N(x,t) = 0 & x \in \partial\Omega, t > 0 \end{cases}$$

ed esiste una costante C tale che

$$\max_{t\in[0,T]}\Big(||u_N(t)||_{W_0^1(\Omega)}+||u_N(t)||_{L^2(\Omega)}\Big) \leq C\Big(||f_N||_{L^2([0,T],L^2(\Omega))}+||u_{0,N}||_{W_0^1(\Omega)}+||u_{1,N}||_{L^2(\Omega)}\Big)$$

Provare che esiste una costante C_1 tale che

$$||\partial_{tt}u_N||_{L^2([0,T],H^{-1}(\Omega))} \leq C_1\Big(||f_N||_{L^2([0,T],L^2(\Omega))} + ||u_{0,N}||_{W_0^1(\Omega)} + ||u_{1,N}||_{L^2(\Omega)}\Big)$$