LA LEGGE DEL MOTO DIFFUSIVO $d = \sqrt{t}$
LA TEORIA DELLE PASSEGGIATE ALEATORIE

Pierluigi Contucci

Anno Accademico 2008-2009

Università di Bologna

INTRODUZIONE

Nel 1827 il biologo Robert Brown osservando dei granelli di polline in sospensione sull'acqua notò che essi seguivano delle traiettorie irregolari e tortuose. Nel 1905 Albert Einstein [1] esaminò il fenomeno dal punto di vista teorico. Nel suo lavoro, considerato una delle prime prove della teoria corpuscolare della materia e di quella meccanico statistica del calore, è dedotta la legge che lega lo spostamento medio delle particelle lungo una direzione, λ con il tempo di osservazione:

$$\lambda = \sqrt{2Dt} \, , \tag{1}$$

dove la costante di *diffusione* D dipende da caratteristiche fisiche quali la temperatura, il tipo di liquido e la dimensione delle particelle. In queste note vogliamo dare una prova della legge di crescita con la radice del tempo di osservazione basandoci su un modello estremamente semplificato di un moto casuale. Considereremo una passaggiata aleatoria in una dimensione [2], cioè seguiremo il moto di una particella che a intervalli di tempo regolari

[1] "Il moto delle particelle in sospensione nei fluidi in quiete, come previsto dalla teoria cinetico-molecolare del calore" Albert Einstein, Opere Scelte, (1988) Bollati Boringhieri.

[2] Si veda il Cap. 6 di: La Fisica di Feynman, Volume 1, Parte 1

$t = 1, 2, 3, ...$ sceglie a caso se fare un passo (di lunghezza unitaria) verso destra o uno verso sinistra. Il modello cosi considerato ha ovviamente ben poco valore dal punto di vista fenomenologico a differenza di quello più realistico a tempi e spazi continui. Tuttavia conserva sorprendentemente la capacità di riprodurre la legge del moto diffusivo. Lo studente potrà fare il confronto tra il caso discreto e quello continuo nei corsi superiori dove sarà anche affrontato il problema del limite del primo al secondo che rappresenta un prototipo di molte altre teorie di natura probabilistica quali quella della percolazione e della meccanica statistica in generale. Per rendere queste note autoconsistenti faremo una brevissima introduzione agli spazi di probabilità discreta, dagli assiomi alla distribuzione binomiale [3]. Il calcolo dello scarto quadratico medio di quest'ultima sarà quanto necessario ad ottenere la legge del moto diffusivo.

SPAZI DI PROBABILITÀ E MODELLI DI PROVE RIPETUTE

Consideriamo un insieme di indici $i \in I$ e ad essi associamo la collezione di numeri $p_i \in P$ che verifica le proprietà

$$\textit{Assioma } 0) \qquad 0 \leq p_i \leq 1 \tag{2}$$

$$\textit{Assioma } 1) \qquad \sum_i p_i = 1 \tag{3}$$

Ciascun indice i identifica un *evento elementare* e p_i è la sua *probabilità*. La coppia (I, P) è uno spazio di *probabilità discreto* e le relazioni (40) e (3) sono

[3]Per una introduzione ai metodi elementari della probabilità si veda: Y.G Sinai "Probability theory: an introductory course" (1992), Springer-Verlag.

il primo e secondo assioma.

Esempio 1: la moneta simmetrica ha spazio di probabilità identificato da

$$T \equiv testa \ , \tag{4}$$

$$C \equiv croce \ , \tag{5}$$

quindi

$$I = (T, C) \ ; \tag{6}$$

e dalle relative probabilità

$$p_T = \frac{1}{2} \ , \tag{7}$$

$$p_C = \frac{1}{2} \ . \tag{8}$$

$$P \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \ . \tag{9}$$

Per esercizio si verfichi che il primo e secondo assioma sono soddisfatti.

Esempio 2: la moneta asimmetrica (o truccata) ha spazio di probabilità identificato dallo stesso spazio di indici

$$I \equiv (T, C) \ , \tag{10}$$

ma da un diverso valore delle probabilità degli eventi

$$p_T = p \ , \tag{11}$$

con

$$0 \leq p \leq 1 \ , \tag{12}$$

e da

$$p_C = 1 - p \ , \tag{13}$$

quindi

$$P \quad \equiv \quad (p, 1-p)\ . \tag{14}$$

Per esercizio si verfichi che anche in questo caso che generalizza quello simmetrico il primo e secondo assioma sono soddisfatti. Si diano inoltre alcuni esempi numerici di p.

Esempio 3: il dado regolare a sei facce ha spazio di probabilità identificato da

$$I \quad \equiv \quad (1, 2, 3, 4, 5, 6)\ , \tag{15}$$

e da

$$P \quad \equiv \quad (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})\ . \tag{16}$$

Un possibile esempio di dado truccato è quello in cui l'evento 6 da solo ha probabilità un mezzo e gli altri eventi $1, 2, 3, 4, 5$ hanno la probabilità p: in tal caso l'assioma (3) impone

$$5p + \frac{1}{2} = 1\ , \tag{17}$$

e quindi $p = \frac{1}{10}$. Si diano altri esempi di spazi di proabilità di un dado truccato.

È di grande importanza considerare il lancio della moneta (o del dado) ripetuto più volte in modo indipendente. Consideriamo dapprima il lancio della moneta simmetrica ripetuto due volte e costruiamo il suo spazio delle probabilità. Avremo che gli eventi elementari saranno

$$I \quad \equiv \quad (TT, TC, CT, CC)\ , \tag{18}$$

e le probabilità

$$P \quad \equiv \quad (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})\ . \tag{19}$$

È utile nell' esempio appena dato analizzare alcuni eventi che non siano eventi elementari: l' evento A definito dall' uscita di croce al primo lancio potrà realizzarsi o come CT o come CC e utilizzando il simbolo di unione insiemistica (elementi che stanno o nel primo o nel secondo insieme) scriveremo

$$A \,=\, CT \,\cup\, CC \;; \tag{20}$$

talvolta si utilizza per esso anche il simbolo

$$CX = CT \,\cup\, CC \;, \tag{21}$$

e la notazione significa che siamo nello spazio di probabilità di due lanci in cui il primo è croce e il secondo non è specificato. Similmente l' evento TXC indica l'uscita, nello spazio dei tre lanci di testa al primo e croce al terzo e vale:

$$TXC = TTC \,\cup\, TCC \;. \tag{22}$$

Gli esempi precedenti illustrano che l'unione di eventi è essa stessa un evento. La stessa proprietà vale per l'intersezione (elementi che stanno sia nel primo che nel secondo insieme). Per esempio se consideriamo

$$TX \,\cap\, XC \;, \tag{23}$$

ci riferiamo all'evento nello spazio dei 2 lanci che ha testa al primo e croce al secondo quindi

$$TX \,\cap\, XC \; = TC \;, \tag{24}$$

In generale non c'è nessuna relazione tra tra le probabilità di certi eventi e quelle della loro intersezione. Tuttavia quando per due eventi A e B vale la

$$P(A \cap B) \,=\, P(A)P(B) \;, \tag{25}$$

i due eventi si dicono *indipendenti*. Due eventi A e B si dicono mutuamente esclusivi (o disgiunti) quando la loro intersezione è l' insieme vuoto:

$$A \cap B = \emptyset, \tag{26}$$

per essi vale

$$\textit{Assioma}\ \ 2) \qquad\qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B)\ . \tag{27}$$

Più in generale quando la loro intersezione è non vuota l'assioma si generalizza in

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)\,. \tag{28}$$

Verifichiamo che i due eventi TX e XC sono indipendenti.

$$P(TX) = P(TT \cup TC) = P(TT) + P(TC) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\,, \tag{29}$$

dove la prima uguaglianza viene dall'assioma 2 dato che $TT \cap TC = \emptyset$. Analogamente si ha $P(XC) = \frac{1}{2}$ e quindi poichè $TX \cap XC = TC$ e $P(TC) = \frac{1}{2}$ la relazione di indipendenza è verificata.

Problema. Dati due eventi indipendenti A e B con $P(A) = \frac{1}{2}$ e $P(B) = \frac{1}{3}$ calcoliamo la probabilità della loro unione. Osserviamo anzitutto che senza l'informazione di indipendenza il problema sarebbe indeterminato dato che manca il valore di $P(A \cup B)$. Grazie all'indipendenza tuttavia sappiamo che $P(A \cup B) = P(A)P(B)$ quindi per la (28) abbiamo:

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \tag{30}$$

Esercizio. Si dica quali delle seguenti coppie di eventi sono indipendenti: (TX, XT), (CX, CX), (XT, CX), (CT, CC), (TC, XT).

Problema. Consideriamo il lancio di un dado ripetuto 3 volte, levento A in cui esce il 2 al secondo lancio e levento B in cui esce il 6 al primo lancio e il 4 al terzo. Ci proponiamo di vedere quali sono gli eventi elementari che compongono A e quelli che compongono B, di calcolare le relative probabilità e infine di determinare se A e B sono eventi indipendenti. Dalla definizione di A si ha:

$$A \,=\, X2X\,, \tag{31}$$

quindi A à formato dall unione dei $6 \cdot 6$ eventi ottenibili inserendo una delle cifre del dado al posto delle X, come per esempio $A_1 = 121$ (da leggere uno-due-uno e non centoventuno!) oppure $A_2 = 122$, etc. Analogamente avremo

$$B \,=\, 6X4\,, \tag{32}$$

quindi B sarà formato dai 6 eventi elementari che si ottengono inserendo una delle sei cifre del dado al posto della X, quali $B_1 = 614$, $B_2 = 624$, etc. Per il calcolo di P(A) la regola di somma fornisce:

$$P(A) = P(\cup_{i=1}^{36} A_i) = \sum_{i=1}^{36} P(A_i) = 36P(A_1) = 36\frac{1}{216} = \frac{1}{6} \tag{33}$$

e analogamente per il calcolo di P(B)

$$P(B) = P(\cup_{i=1}^{6} B_i) = \sum_{i=1}^{6} P(B_i) = 6P(B_1) = 6\frac{1}{216} = \frac{1}{36}\,. \tag{34}$$

Infine per stabilire se i due eventi A e B sono indipendenti notiamo anzitutto che l'evento intersezione $A \cap B = 624$ quindi $P(A \cap B) = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$ e $P(A)P(B) = \frac{1}{6}\frac{1}{36} = \frac{1}{216}$, quindi $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ cioè gli eventi A e B sono indipendenti.

VARIABILI ALEATORIE E LORO MEDIE

Una funzione che associa un numero a ciascun evento elementare di uno spazio di probabilità è chiamata *variabile aleatoria*. Per esempio la funzione che vale 1 in corrispondenza della testa della moneta e -1 in corrispondenza della croce:

$$\begin{aligned} I &= (T, C) \\ P &= (p, 1-p) \\ f &= (1, -1)\,. \end{aligned} \tag{35}$$

In generale avremo

$$\begin{aligned} I &= (1, 2, \cdots n) \\ P &= (p_1, p_2, \cdots p_n) \\ f &= (f_1, f_2, \cdots f_n)\,. \end{aligned}$$

Si definisce *valor medio* della funzione f la quantità

$$E(f) = \sum_{i=1}^{n} f_i p_i\,. \tag{36}$$

Il significato del valor medio generalizza quello di media aritmetica di una successione. Per comprendere questo punto esaminiamo il modo di calcolare il voto medio riportato da uno studente nel suo corso di studi universitari. Se il voto nell'iesimo esame è stato v_i la classica definizione di media dei voti è quella data dalla formula

$$\bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} v_i\,; \tag{37}$$

chiaramente la (37) è un caso particolare della (36) quando si scelga $p_i = \frac{1}{n}$. La defnizione generale si presto a una migliore definizione di media dei voti d'esame negli attuali corsi di laurea in cui non tutti i corsi hanno lo stesso "volume" essendo misurati in crediti. Se c_i è il numero di crediti associati ad un certo corso una buona misura del valor medio del voto sul corso di laurea potrà ottenersi con

$$p_i \;=\; \frac{c_i}{\sum_{i=1}^{n} c_i}\;, \tag{38}$$

(verificare che la precedente definisce uno spazio di probabilità) e applicando la (36).

Notiamo che il valore medio di una combinazione lineare di due funzioni è uguale alla combinazione lineare dei valori medi:

$$E(\alpha f + \beta g) \;=\; \sum_{i=1}^{n} (\alpha f_i + \beta g_i) p_i \;=\; \alpha \sum_{i=1}^{n} f_i p_i + \beta \sum_{i=1}^{n} g_i p_i \;=\; \alpha E(f) + \beta E(g)\;. \tag{39}$$

Inoltre se una variabile aleatoria è non negativa anche la sua media è non negativa:

$$f_i \;\geq\; 0 \qquad \textit{implica} \qquad E(f) \geq 0\;. \tag{40}$$

Infine si osserva che la variabile aleatoria costante unitaria ha valor medio unitario:

$$f_i \;=\; 1 \qquad \textit{implica} \qquad E(f) = 1\;. \tag{41}$$

Si provi per esercizio la (40) e la (41).

Problema. Consideriamo un dado asimmetrico in cui la probabilità del 6 è di un mezzo mentre tutte le altre facce hanno uguale probabilità 1/10 (vedi la 17). Vogliamo calcolare nel lancio del dado ripetuto tre volte la probabilità degli eventi $X2X$ e $6X4$ e della loro intersezione 624; infine vogliamo calcolare media della variabile aleatoria $f_i = i$ e confrontarla col caso del dado simmetrico. Dal calcolo diretto per somma degli eventi elementari si ha

$$P(X2X) = \frac{1}{10}\,, \tag{42}$$

$$P(6X4) = \frac{1}{20}\,, \tag{43}$$

$$P(624) = \frac{1}{200}\,. \tag{44}$$

Notiamo quindi che lindipendenza tra gli eventi A e B vale anche nel caso del dado asimmetrico. Infine abbiamo:

$$E(f) = \sum_{i=1}^{6} ip_i \; = \; \frac{1}{10}(1+2+3+4+5) + \frac{1}{2}6 = 4,5 \tag{45}$$

mentre per il dado simmetrico vale

$$E(f) = \sum_{i=1}^{6} ip_i \; = \; \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3.5 \tag{46}$$

Oltre al valor medio è utile considerare un'altra quantità che fornisce una indicazione di quanto i valori della variabile aleatoria f oscillino intorno al loro valor medio: la varianza.

Si definisce varianza di una variabile aleatoria la quantità

$$\begin{aligned} V(f) &= E([f-E(f)]^2) \; = \; E\left(f^2 - 2fE(f) + E(f)^2\right) \\ &= E(f^2) - E(f)^2 \; = \; \sum_{i=1}^{n} f_i^2 p_i - (\sum_{i=1}^{n} f_i p_i)^2\,, \end{aligned} \tag{47}$$

dove abbiamo usato le proprietà della media. Notiamo che per definizione si ha sempre $V(f) \geq 0$ e quindi $E(f^2) \; \geq \; E(f)^2$.

Esercizio. Provare le seguebti proprietà della varianza:

$$V(\alpha f) \,=\, \alpha^2 V(f)\;, \tag{48}$$

$$V(c) = 0\;, \tag{49}$$

e

$$V(f - c) = V(f) \tag{50}$$

Problema. Calcolare media e varianza della variabile aleatoria definita dalle (35) nello spazio della moneta asimmetrica:

$$E(f) = f_T p_T + f_C p_C = p - (1 - p) = 2p - 1\,, \tag{51}$$

$$E(f^2) = f_T^2 p_T + f_C^2 p_C = p + (1 - p) = 1\,, \tag{52}$$

$$V(f) = E(f^2) - E(f)^2 = 1 - (2p - 1)^2 = 1 - 4p^2 + 4p - 1 = 4p(1 - p)\;. \tag{53}$$

DISTRIBUZIONE BINOMIALE

Vogliamo ora concentrarci sul caso della moneta asimmetrica e considerarne il lancio un numero arbitrario di volte n. In particolare vogliamo stabilire qual è la probabilità che in n lanci si abbiano k teste. Il problema si riconduce ad uno di tipo combinatorio del contare quante parole diverse possiamo formare con k lettere di tipo T e $n - k$ lettere di tipo C. Per cominciare facciamo il caso con $k = 2$ e $n = 3$. Le possibilità sono TTC, TCT, CTT ed ognuna di esse ha (per l'indipendenza dei lanci) probabilità:

$$p^2(1 - p)\,. \tag{54}$$

In generale il numero di parole sarà dato dal fattore binomiale

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \ , \tag{55}$$

per dimostrarlo osserviamo che questo intero conta il numero di parole distinte che si possono scrivere con un sacchetto di n lettere di cui k sono T e le rimanenti sono C. Dapprima supponiamo che le lettere siano tutte distinte, in tal caso si avrebbero $n!$ parole diverse. Cosi facendo tuttavia abbiamo contato parole uguali come se fossero distinte. Dobbiamo quindi dividere il risultato per i modi in cui si permutano tra loro le lettere coincidenti di tipo T, cioè $k!$, e di tipo C, cioè $(n-k)!$ Per ciascuno degli eventi elementari avremo che la probabilità è (per l'indipendenza dei lanci)

$$p^k(1-p)^{(n-k)} \ . \tag{56}$$

Pertanto utilizzando la proprietà (27) otteniamo

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k(1-p)^{(n-k)} \ . \tag{57}$$

La formula sopra scritta definisce la distribuzione binomiale della variabile aleatoria $f =$ numero di teste in n lanci. Notiamo infatti che la somma delle probabilità totale risulta

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k(1-p)^{(n-k)} = (p+1-p)^n = 1, \tag{58}$$

dove si è utilizzata la formula del binomio di Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k} \tag{59}$$

Calcoliamo media e varianza di f.

$$\begin{aligned} E(f) &= \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{(n-k)} \end{aligned} \tag{60}$$

dove si è osservato che il primo termine della somma non contribuisce essendo zero e si è semplificato un fattore k dai rimanenti. Ora poniamo $l = k - 1$ e otteniamo

$$\begin{aligned} E(f) &= \sum_{l=0}^{n-1} \frac{n!}{l!(n-l-1)!} p^{l+1} (1-p)^{(n-l-1)} \\ &= np \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{l!(n-1-l)!} p^{l} (1-p)^{(n-1-l)} \\ &= np \sum_{l=0}^{n-1} P_{n-1}(l) = np\,. \end{aligned} \tag{61}$$

Per il calcolo della varianza si procede in modo analogo

$$\begin{aligned} E(f^2) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{(n-k)} \end{aligned} \tag{62}$$

Ora poniamo $l = k - 1$ e otteniamo

$$E(f^2) = \sum_{l=0}^{n-1} (l+1) \frac{n!}{l!(n-1-l)!} p^{l+1} (1-p)^{(n-1-l)} \tag{63}$$

$$\begin{aligned} &= np\sum_{l=0}^{n-1} lP_{n-1}(l) + np\sum_{l=0}^{n-1} P_{n-1}(l) \\ &= np(n-1)p + np = n^2p^2 - np^2 + np\,. \end{aligned}$$

da cui

$$V(f) = np(1-p)\ . \tag{64}$$

IL MOTO DIFFUSIVO

Consideriamo ora il modello della passeggiata aleatoria. La posizione della particella al tempo discreto n è identificata da $x(n) \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Notiamo che la posizione casuale $x(n)$ è legata al numero di passi verso destra $N_D = k$ e da quelli verso sinistra $N_s = n - k$ dalla relazione $x(n) = N_D - N_s = k - n + k = 2k - n$. È immediato rendersi conto che ciascuna traiettoria casuale $x(1), x(2), ..., x(n)$ corrisponde a un successione casuale di n simboli $\{D, D, S, D, S, D, D, ..., D\}$. Se assumiamo che la probabilità di andare verso destra sia uguale a quella di andare verso sinistra, la nostra traiettoria è un evento elementare nello spazio di probabilità della moneta simmetrica, e la probabilità di essere a distanza $x(n) = 2k-n$ è la binomiale di n lanci e k teste con $p = 1/2$. Dobbiamo trovare ora una buona misura per stimare la distanza media percorsa nel tempo n. Un primo tentativo è quello di definire la distanza percorsa come la media di $x(n)$. Si trova subito tuttavia che

$$E(x) = E(2k-n) = 2\frac{n}{2} - n = 0\ . \tag{65}$$

Otteniamo invece una buona misura del quadrato della distanza d dal calcolo di $E(x^2)$ cioè $V(x)$. Un rapido calcolo che utilizza le (48),(50) e (64) fornisce

$$d^2 = V(x) = V(2k - n) = 4V(k) = 4\frac{n}{4} = n \; , \tag{66}$$

da cui segue la legge del moto diffusivo $d = \sqrt{n}$.