Appunti su argomenti monografici per il corso di FM1
Prof. Pierluigi Contucci

Relatività Ristretta. Trasformazioni di Lorentz e Metrica di Minkowski

Consideriamo le coordinate spazio-temporali in due sistemi di riferimento $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$

$$(x, y, z, t) \quad e \quad (x', y', z', t')$$

in cui $\mathcal{O}'$ si muove lungo l'asse x di $\mathcal{O}$ con velocita v. Nell'istante $t = t' = 0$ in cui $\mathcal{O}'$ è perfettamente sovrapposto a $\mathcal{O}$ un'onda luminosa sferica si genera nella comune origine degli assi e si espande a velocità c. L'impossibilità di distinguere due sistemi di riferimento inerziali, il postulato della relatività ristretta, impone che l'onda che si espande sia sferica, con centro nelle relative origini, in entrambi i sistemi di riferimento. Questo si traduce nelle equazioni

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= c^2 t^2 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 &= c'^2 t'^2 \end{aligned} \tag{1}$$

Siccome il piano y, z è in quiete rispetto y', z' avremo

$$\begin{aligned} y &= y' \\ z &= z' \end{aligned} \tag{2}$$

Da (1) e (2) si ottiene

$$x^2 - (ct)^2 = x'^2 - (ct')^2 \tag{3}$$

Si verifica subito che la trasformazione di Galileo

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ t' &= t \end{aligned} \tag{4}$$

non soddisfa le (3). Introducendo i tempi ridotti

$$\tau = ct \quad , \quad \tau' = ct'$$

cerchiamo la più generale trasformazione lineare che permette di soddisfare le (1):

$$\begin{aligned} x' &= a_1 x + b_1 \tau \\ \tau' &= a_2 x + b_2 \tau \end{aligned} \tag{5}$$

La trasformazione inserita nelle (3) porge

$$x^2 - \tau^2 = x^2(a_1^2 - a_2^2) - \tau^2(b_2^2 - b_1^2) + 2(a_1 b_1 - a_2 b_2) x\tau$$

che per il principio di identità dei polinomi porge

$$\begin{aligned} a_1^2 - a_2^2 &= 1 \\ b_2^2 - b_1^2 &= 1 \\ a_1 b_1 - a_2 b_2 &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Cerchiamo una soluzione nella forma

$$a_1 = \cosh\theta_1 \quad , \quad a_2 = \sinh\theta_1$$

e

$$b_2 = \cosh\theta_2 \quad , \quad b_1 = \sinh\theta_2$$

La terza relazione di (6) porge

$$\tanh\theta_1 = \tanh\theta_2$$

da cui

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta$$

Poichè

$$\frac{x}{\tau} = \frac{v}{c} = -\tanh\theta$$

e usando le

$$\cosh x = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2 x}}$$

$$\sinh x = \frac{\tanh x}{\sqrt{1-\tanh^2 x}}$$

che tradotte nelle relazioni lineari porgono

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}(x - vt) \\ t' &= \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}(t - \frac{xv}{c^2}) \end{aligned} \tag{7}$$

chiamate trasformazioni di Lorentz le cui inverse sono

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}(x' + vt) \\ t &= \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}(t' + \frac{x'v}{c^2}) \end{aligned} \tag{8}$$

Si osserva che per $\frac{v}{c}$ piccoli le trasformazioni di Lorentz coincidono con quelle di Galileo.

Quanto visto ammette una elegante formulazione: le trasformazioni di Galileo conservano le distanze Euclidee tra punti cioè

$$d_E(P,P')^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \ ;$$

si può infatti mostrare che sono le più generali trasformazioni lineari di coordinate con una simile proprietà (lo si faccia per esercizio), mentre le trasformazioni di Lorentz conservano le (pseudo)-distanze di Minkowski

$$d_M(P,P')^2 = -(ct - ct')^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

e ciò rappresenta il contenuto della dimostrazione con cui le abbiamo dedotte.