International Conference · October 8, 2016 · Department of Mathematics · University of Bologna

La Matematica e la sua Didattica

Mathematics and Mathematics Education

In occasion of the 70 years of Bruno D'Amore

Editor
Maura Iori

Preface
Bruno D'Amore

Pitagora Editrice Bologna

Questo volume raccoglie i contributi dei relatori del Convegno Internazionale *La Matematica e la sua Didattica*, tenutosi l'8 ottobre 2016 presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna, dedicato ai 70 anni di Bruno D'Amore. Al di là dell'occasione, è una raccolta di significative testimonianze dovute ad alcuni tra i massimi protagonisti della ricerca in diversi campi.

This volume collects the contributions of the lecturers of the International Conference *Mathematics and Mathematics Education*, that took place on October 8, 2016, at the Department of Mathematics of the University of Bologna, Italy. The conference was dedicated to the 70 years of Bruno D'Amore. Beyond the occasion, this publication is a collection of relevant evidences from some of the leading researchers in different fields.

In copertina: *Impossible figures*, di Oscar Reutersvärd, 1981 circa.
Front cover: *Impossible figures*, by Oscar Reutersvärd, circa 1981.

ISBN 88-371-1927-5
9 788837 119270

International Conference · October 8, 2016 · Department of Mathematics · University of Bologna

La Matematica e la sua Didattica

Mathematics and Mathematics Education

In occasion of the 70 years of Bruno D'Amore

Editor
Maura Iori

Preface
Bruno D'Amore

Pitagora Editrice Bologna

-

Direzione del Convegno
Miglena Asenova, Giorgio Bolondi, Maura Iori, Silvia Sbaragli

ISBN 88-371-1927-5

Stampa: Pitagora Editrice S.r.l., Via del Legatore 3, Bologna, Italy.

http://www.pitagoragroup.it
e-mail: pited@pitagoragroup.it

Questo libro può essere scaricato gratuitamente da ciascuno dei seguenti siti:

http://www.dm.unibo.it/rsddm
http://www.incontriconlamatematica.net
http://www.incontriconlamatematica.org

Partecipanti al Convegno:

Maria Luisa Altieri Biagi, Luis Carlos Arboleda (Colombia), Gianfranco Arrigo (Svizzera), Miglena Asenova, Massimo Baldacci, Hector Mauricio Becerra Galindo (Colombia), Alberto Bertoni, Luis Ángel Bohórquez Arenas (Colombia), Giorgio Bolondi, Paolo Bonavoglia, Luigi Borzacchini, Umberto Bottazzini, Laura Branchetti, Guy Brousseau (Francia), Andrea Canevaro, Vittorio Capecchi, Anna Cerasoli, Claudio Cerritelli, Theodora Christodoulou (Cipro), Ciro Ciliberto, Tullia Colombo, Pierluigi Contucci, Ubiritan D'Ambrosio (Brasile), Mirko Degli Esposti, Jean Dhombres (Francia), Pietro Di Martino, Benedetto Di Paola, Giovanni Dore, Liliana Dozza, Raymond Duval (Francia), Iliada Elia (Cipro), Piergiuseppe Ellerani, Martha Isabel Fandiño Pinilla, Giovanni Ferraro, Federica Ferretti, Massimo Ferri, Athanasios Gagatsis (Cipro), Gianfranco Gambarelli, Giangiacomo Gerla, Fredy Enrique González (Venezuela), Jhon Holguin Alvarez (Perù), Maura Iori, Victor Larios Osorio (México), Alice Lemmo, Olga Lucía León (Colombia), Salvador Llinares (Spagna), Daniela Lucangeli, Maestría en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Carmelo Mammana, Alain Marchive (Francia), Maria Alessandra Mariotti, Maurizio Matteuzzi, Ivo Mattozzi, Paraskevi Michael-Chrysanthou (Cipro), Deissy Milena Narvaez Ortiz (Colombia), Paolo Negrini, Piergiorgio Odifreddi, Claudia Lisete Oliveira Groenwald (Brasile), Marco Panza, Domingo Paola, Carlo Alberto Parmeggiani, Emilio Pasquini, Erkki Pehkonen (Finlandia), Tito Pellegrino, Tiziano Pera, Luis Radford (Canada), Henry Alexander Ramirez Bernal (Colombia), Tobia Ravà, Pedro Javier Rojas Garzón (Colombia), Pier Giuseppe Rossi, Carla Ida Salviati, Bernard Sarrazy (Francia), Silvia Sbaragli, Luz Marina Sierra (Colombia), Sandra Soler Castillo (Colombia), Aldo Spizzichino, Publio Suárez Sotomonte (Colombia), Carlo Toffalori, Luigi Tomasi, Roberto Tortora, Pierluigi Vannozzi, Carlos Eduardo Vasco (Colombia), Sergio Vastarella, Rodolfo Vergel (Colombia), Paola Vighi, Fernando Zalamea (Colombia), Rosetta Zan.

Programma:

Ore 9:00 – 9:15, saluti delle autorità.
Ore 9:15 – 11:00, brevi interventi di:
Raymond Duval - Fernando Zalamea - Erkki Pehkonen - Carlos E. Vasco - Paola Vighi - Consolato Pellegrino - Benedetto Di Paola.
Ore 11:15 – 11:30, saluti del Gruppo RSDDM dell'Università di Bologna.
Ore 11:30 – 13:15, brevi interventi di:
Vittorio Capecchi - Pierluigi Contucci - Massimo Ferri - Piergiuseppe Ellerani - Giangiacomo Gerla - Gianfranco Gambarelli - Luigi Borzacchini.
Ore 14:30 – 16:00, brevi interventi di:
Maria Luisa Altieri Biagi - Maurizio Matteuzzi - Ivo Mattozzi - Emilio Pasquini - Massimo Baldacci - Pier Giuseppe Rossi.
Ore 16:30 – 17:30, brevi interventi di:
Tobia Ravà - Carlo Alberto Parmeggiani - Anna Cerasoli - Bruno D'Amore.

Indice

Matematica e Democrazia

Pierluigi Contucci
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna

Sunto. *Non vi è dubbio alcuno che il concetto di Democrazia sia tra i più complessi della cultura umana. Da un lato esso si basa su suggestive idee quali la partecipazione di tutti alla vita politica e all'impegno civile e sulla difesa dei diritti umani e dall'altra agisce con uno strumento troppo semplificato come la legge di maggioranza su una scelta dicotomica. Non è dunque sorprendente che la sua realizzazione incontri delle difficoltà in diversi stadi quali quelli della rappresentanza di minoranze e la partecipazione di fasce della popolazione senza una opportuna educazione di base. Questo breve intervento presenta il coinvolgimento della matematica in questo concetto, dal lavoro di Condorcet fino ai suoi recenti sviluppi. La Democrazia è un efficace sistema di governo da fondare su un opportuno livello di cultura di tutti i cittadini. Noi sosteniamo che, tra gli strumenti di quel livello di base, quelli di natura matematica siano stati tra i più ingiustamente ignorati e che una robusta conoscenza di probabilità elementare debba sicuramente essere inclusa.*

Abstract. *The concept of Democracy is one of the most complex in human culture. While it is based on suggestive ideas like the participation of all people to political and civic life and the protection of human rights it also acts mostly with an over-simplified instrument like the majority rule on a single choice. It is no surprise therefore that its realization encounters difficulties at many levels especially with representing minorities and dealing with participation of people without a basic education. In this short note we present the involvement of mathematics within this concept, from the work of Condorcet to its recent development. Democracy is an effective government form to be founded on a suitable basic level of literacy of all the citizens. We claim that, among the literacy tools, those of mathematical nature have been the most unfairly neglected and that a robust knowledge of basic probability must surely be included.*

1. Prologo

Nel testo e nelle conclusioni di questo breve intervento il lettore troverà, ripetuta, rimarcata e più spesso sottintesa, la ferma convinzione che una solida cultura matematica va oltre alle necessità dell'ingegnere, del fisico o del matematico di professione. Essa dovrebbe essere al centro della cultura di base del cittadino come uno strumento di lettura, comprensione ed elaborazione del complesso sistema di informazioni in cui è immerso. La diffusione e la promozione di quella cultura è un mestiere assai arduo che purtroppo raramente i professionisti della materia *sanno*, alcuni di loro dicono *vogliono*, fare. L'amico, collega e maestro Bruno D'Amore, il festeggiato, è la figura di spicco nel panorama nazionale e un punto di riferimento in quello internazionale, tra quei rarissimi che hanno fatto una missione di quel mestiere. Infaticabile lavoratore, cultore coi più vasti orizzonti della disciplina, dotato di quell'eleganza intellettuale che si accompagna a una genuina curiosità e all'assenza di ogni snobismo, a Bruno una sola impresa risulta ardua: il passare inosservato, come la sua natura schiva vorrebbe. Auguri mio caro, per il tuo primo 70esimo compleanno e le future iniziative con cui saprai sorprenderci non meno che con quelle passate.

2. La crisi della Democrazia tra partecipazione e delega

Per avere una idea dello stato di salute delle nostre democrazie, diciamo di quelle occidentali, basta uno sguardo ai fenomeni recenti, per esempio quelli referendari, dalla Brexit a quello sulla Costituzione che ci attende a breve. Oppure alle primarie nei due schieramenti statunitensi. Chi scrive non ha le competenze per una analisi tecnica di scienza politica ma alcuni fatti elementari possono essere compresi comunque. La partecipazione alla vita democratica nell'occidente segue regole che sono emerse e si sono raffinate in diversi secoli nel contesto di una comunicazione sociale condotta lentamente e a corto raggio nella direzione orizzontale, cioè tra persona a persona, e in modo relativamente rapido e lungo raggio nella direzione verticale, cioè dalle fonti istituzionali ai cittadini attraverso i mezzi di informazione tradizionali. Negli ultimi anni però le modalità di diffusione dell'informazione sono radicalmente mutate ed ora il raggio della comunicazione è arbitrario in ogni direzione, i tempi brevissimi e, almeno in linea di principio, tutti possono scrivere e comunicare su tutto e verso tutti in qualsiasi momento e in modalità istantanea. Se la comunicazione è il tessuto della società pare ovvio che l'organizzazione civile e la politica hanno il dovere di adeguarsi al nuovo tessuto. Ma farlo è difficile per la naturale inerzia delle istituzioni e di fatto la cosa non accade. In sintesi l'equilibrio tra partecipazione e delega che ha funzionato relativamente bene nella storia moderna è oggi in crisi. Il ricorso alla rete Internet per colmare le nuove lacune ha prodotto eventi disfunzionali ma anche dei fenomeni interessanti come il concetto di Democrazia Liquida e il gruppo Liquid Feedback (Liquid Feedback, Wiki).

3. La teoria del voto democratico secondo Condorcet

In questo breve intervento vogliamo fare una carrellata su quanto e come la matematica sia stata coinvolta nella teoria del voto e della partecipazione democratica. Nel periodo rivoluzionario francese, e negli anni che lo precedono, la progressiva delegittimazione delle autorità tradizionali e la necessità di dotarsi di criteri decisionali in linea con le idee fondanti dell'epoca porta molti intellettuali a cimentarsi in tentativi di razionalizzazione del processo che porta alla scelta ottimale per il gruppo. Nasce in altre parole il trattamento sistematico del sistema di voto in un periodo in cui la Matematica aveva saputo conquistare sia l'attenzione pubblica che politica.

Condorcet, nel suo trattato sul progresso dello spirito umano (Condorcet, 1974), in quella che lui chiama la decima epoca cioè il futuro, auspica una evoluzione delle scienze sociali e politiche non meno efficace e robusta di quella appena avvenuta per le scienze naturali. Il grado di precisione, affidabilità e raffinatezza raggiunto da queste ultime attraverso l'uso del metodo matematico viene portato come esempio da imitare ed egli si fa fervente assertore dell'utilizzo dello stesso rigoroso metodo nell'organizzazione della società. Tra le parti della matematica più utili a tale scopo egli suggerisce il calcolo delle probabilità e ne illustra le molteplici ragioni.

In questa sezione vogliamo esporre brevemente le idee principali della sua teoria del voto democratico. Queste idee sono ancora oggi un punto di riferimento non solo per i teorici delle scienze politiche e sociali ma, negli ultimi anni dello sviluppo tecnologico di internet, hanno invaso gli studi di informatica e si stanno rivelando fertilissime di applicazioni.

Condorcet parte dal constatare la complessità della teoria del voto politico dalla sua origine individuale fino alla necessità di sintetizzarla in una scelta sociale in grado di creare consenso. In particolare egli osserva che assumere l'opinione individuale come dicotomica, cioè nelle forme tipiche di favorevole o contrario, si o no, alzata di mano etc., toglie una enorme libertà di espressione. La scelta individuale in quel caso risulta vincolata e privata di espressione e corre spesso il rischio di essere manipolata dalle fasi istruttorie di voto e in quelle successive. Per prima cosa quindi il voto deve essere basato su un sistema di opinione che permetta al cittadino di ordinare una serie di possibilità, siano esse opzioni o candidati, proposte o soluzioni a uno specifico problema. Il tutto deve essere fatto secondo le sue preferenze. Dati quindi, per esempio, i candidati A, B, C, D votare significa ordinarli ed eventualmente dichiarare qualche parità tra essi: un voto potrà essere $A > D = C > B$, oppure $D > C > A > B$, o ancora $C = D > A > B$ etc.

Questa estensione dello spazio espressivo del voto individuale da dicotomica a multi-dimensionale ha in matematica un significato molto preciso: il campo locale della teoria del voto è descritto da un punto su uno spazio discreto quale il gruppo delle permutazioni quando non si ammettono parità, e dal gruppo di Fubini in quei casi in cui esse sono ammesse. Per addentrarci nel pensiero di Condorcet conviene quindi introdurre un minimo di notazione. Chiameremo v_i il voto del i-esimo votante di una assemblea di N individui. v_i sarà un ordine debole di k candidati (o opzioni), un punto dell'insieme R_k. I numeri di Fubini sono le cardinalità di R_k: $|R_1| = 1$, $|R_2| = 3$, $|R_3| = 13$, $|R_4| = 75$, $|R_5| = 541$ etc. Si può mostrare con tecniche algebrico-combinatorie che $|R_k|$ cresce più velocemente dell'esponenziale secondo un fattore moltiplicativo a potenza c^k con c ≈ 1.44. Queste nozioni di crescita non sono meri tecnicismi. Ci informano invece che se la cardinalità delle opzioni cresce fino all'ordine delle centinaia, come per esempio accade nel problema di ranking di alberghi per una città di medie dimensioni come Bologna, lo spazio R_k non è visitabile esaustivamente, cioè non permette a nessuno strumento di calcolo, inclusi i computer presenti o futuri, di esplorare una ad una tutte le possibilità di voto in quanto questo richiederebbe un tempo superiore all'età stimata dell'universo. Problemi di questo tipo sono noti in informatica e vengono chiamati NP-completi (Papadimitriou, 1994). Va precisato che la struttura combinatoria presente nelle opere di Condorcet compare già nei manoscritti (rinvenuti solo nel 2001) del filosofo medioevale Ramon Llull (Llull, 1315). A prescindere da attribuzioni storiche della scoperta, che in ogni caso ritengono i due contributi del tutto indipendenti, va osservato che la novità e la portata dell'opera di Condorcet risiede nell'uso di concetti probabilistici del tutto assenti nell'opera di Llull.

Definito lo spazio di voto Condorcet si preoccupa di aggregare le opinioni nel modo più rappresentativo possibile secondo gli schemi repubblicani dell'epoca. Procediamo per esempi. Se un'assemblea, immaginiamo quella di una scuola superiore, deve decidere dove andare in gita a fine anno, e le opzioni sono solo due, Milano e Roma, l'alzata di mano e la scelta a maggioranza è l'unica compatibile col criterio democratico. Ma se le preferenze vanno espresse tra tre o più possibilità si possono presentare nuovi e inaspettati effetti. Una classe quindi, di 60 studenti, deve decidere se andare a Londra, Parigi e Roma. I voti di preferenza che emergono sono rappresentati nella seguente tabella:

30	20	10
Parigi	Roma	Londra
Roma	Parigi	Parigi
Londra	Londra	Roma

cioè 30 studenti hanno votato *Parigi* > *Roma* > *Londra*, 20 studenti hanno votato *Roma* > *Parigi* > *Londra* e 10 *Londra* > *Parigi* > *Roma*. Il confronto a coppie dei risultati fornisce quindi:

– Parigi è preferita a Roma 40 a 20
– Roma è preferita a Londra 50 a 10
– Parigi è preferita a Londra 50 a 10

e la classifica vincente risulta: *Parigi* > *Roma* > *Londra*. Un altro esempio tuttavia, conosciuto anche come paradosso di Condorcet, ma che andrebbe piuttosto chiamato fenomeno di Condorcet, illustra che lo stesso criterio può portare ad una apparente inconsistenza:

25	9	12	14
Parigi	Londra	Roma	Londra
Roma	Parigi	Londra	Roma
Londra	Roma	Parigi	Parigi

In questo caso il confronto a coppie fornisce:

– Parigi è preferita a Roma 34 a 26
– Roma è preferita a Londra 37 a 23
– Londra è preferita a Parigi a 35 a 25

che non porterebbe a nessuna classifica vincente secondo il criterio precedente perché, esprimendoci in termini matematici, il grafo delle preferenze contiene un ciclo: *Parigi* > *Roma* > *Londra* > *Parigi*.
Si potrebbe ritenere che utilizzare in modo quantitativo gli scarti sulle vittorie possa eliminare l'anomalia ma non è così e possono costruire controesempi con un po di pazienza. La soluzione proposta da Condorcet per ovviare a questo problema è infatti basata su un diverso concetto. Egli introduce la distanza tra voti:

$d(r_1, r_2)$ = minimo numero di permutazioni per far coincidere v_1 con v_2.

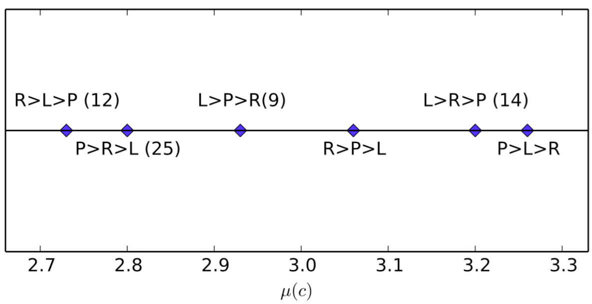
Quindi, per esempio

– $d(A>B>C,B>A>C) = 1$
– $d(A > B > C,C > A > B) = 2$
– $d(A>B>C,C>B>A) = 3$

Se come risultato di una elezione si proponesse il risultato *c* (dove la lettera c sta per *consenso tentativo*) il votante i-esimo sarebbe distante $d(v_i,c)$ dalla proposta. Questa distanza rappresenta quindi una possibile misura dell'insoddisfazione del votante che si è espresso con voto v_i rispetto alla proposta c. Per l'insieme di tutti i votanti quindi la distanza, o insoddisfazione, *media* da *c* è data da:

$$\mu(c) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} d(v_i, c) \ .$$

Nell'esempio precedente possiamo farci una idea dello spazio delle possibili soluzioni e della relativa distanza media dagli elettori rispetto ciascuna soluzione analizzando la seguente figura:



Condorcet propone come soluzione il risultato c* che minimizza la distanza media (o totale) dall'elettorato. Questa scelta corrisponde a scegliere la soluzione che, pur non soddisfacendo tutti, minimizza il disappunto della comunità o, se si preferisce, massimizza la soddisfazione. Matematicamente è la soluzione del problema variazionale:

$$\inf_c \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} d(v_i, c) \ ,$$

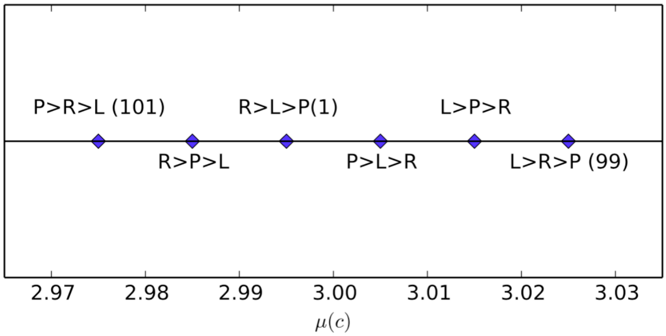
che nell'ultimo esempio risulta essere *Roma* > *Londra* > *Parigi*. La soluzione di Condorcet, in generale non unica, è la mediana dell'insieme di punti rispetto alla metrica introdotta e non il baricentro tra essi. La distinzione tra i due concetti era già stata chiarita da Torricelli e Cavalieri: la mediana minimizza la somma delle distanze mentre il baricentro minimizza la somma dei quadrati delle distanze. Nonostante ciò la confusione dei due concetti continua ad inficiare i risultati degli istituti di statistica internazionali come nella definizione di centro della popolazione data dallo United States Census Bureau nel 1919. Un decennio dopo fu Corrado Gini a far notare che la mediana era confusa col baricentro (Gini, 1915). La distanza specifica introdotta da Condorcet a titolo esemplificativo è solo una delle metriche possibili che possono essere considerate. Oggi sappiamo che queste metriche sono classificate in classi di equivalenza e che in applicazioni diverse hanno forme diverse. È interessante anche aggiungere che le ricerche in questi campi sono oggi principalmente svolte dai colossi del digitale quali Yahoo, Google e Facebook. Nel terminare questa sezione si può fare notare che nonostante le nozioni introdotte fino ad ora sono di natura algebrico-combinatoria (lo spazio dei voti), geometrica (la distanza) e analitica (il calcolo del minimo). È invero la natura probabilistica quella più intrinsecamente adatta a descrivere il cuore del problema: i vari v_i sono in termini moderni le variabili aleatorie che descrivono il comportamento macroscopico di un sistema ad N componenti. Condorcet studia questo tema delle scienze sociali identificandone una soluzione come problema di minimo e apre in questo una nuova prospettiva ricca di importanti conseguenze.

4. Uno sviluppo recente della teoria di Condorcet

Consideriamo un'altra votazione, questa però con una forte polarizzazione descritta dalla tavola di voti:

101	99	1
Parigi	Londra	Roma
Roma	Roma	Londra
Londra	Parigi	Parigi

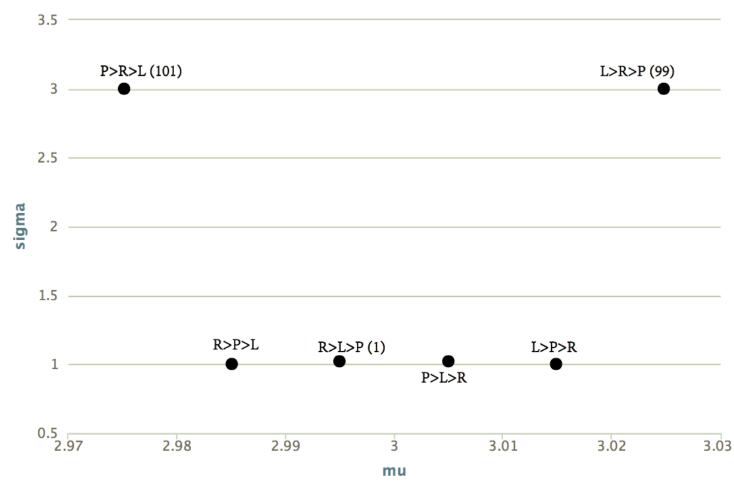
La teoria di Condorcet ci fornisce uno spazio unidimensionale su cui scegliere la soluzione, come riportato qui sotto:



Come si vede la votazione vincente secondo Condorcet risulta essere, come ci si aspetta, $P > R > L$, ma si vede bene che si sta operando una scelta di minimo basandosi su uno scarto infinitesimale (tre parti su mille nel valore di μ) rispetto a un altra soluzione $R > P > L$. Si sta facendo la scelta giusta? Per capire meglio la domanda torniamo alla scelta classica tra due alternative. L'approccio egalitario non lascia spazio ad altre scelte se non quella della maggioranza. Sappiamo tuttavia che, anche in quel caso, le votazioni ad ampia maggioranza risultano gradite, non lasciano strascichi di tensione e hanno un risultato stabile nel tempo. Altre invece, quelle in cui la maggioranza viene raggiunta per uno scarto irrisorio, conduce sempre a situazioni di grande instabilità. Qual' è il parametro che misura questo disagio? Un esempio chiarisce la questione. Consideriamo la votazione di 100 individui che scelgono uno tra due rappresentanti. Se A riceve 95 voti e B ne riceve 5 scegliere A come vincitore soddisfa 95 persone e ne scontenta 5. La soddisfazione media è dunque di 0.9 dato che la probabilità risulta p = .95 e la media della soddisfazione è data da 2p − 1, dove si sono utilizzati nozioni basilari sulla distribuzione di Bernoulli. Il calcolo delle probabilità ci suggerisce un altro dato cruciale: la deviazione standard che misura le fluttuazioni medie. In questo caso la varianza risulta essere p(1 − p) circa 0.21. Nel caso in cui invece i votanti per le due opzioni siano 51 e 49 la soddisfazione per la soluzione di Condorcet è piccolissima (circa 0.02) ma la deviazione standard che risulta essere di 0.49 è vicina al suo valore massimo di 0.5. La deviazione standard in ogni questione di scelta sociale ha un grandissimo peso. Essa non misura la media in assoluto della variabile aleatoria, quanto la media dei confronti. In campo economico per esempio, un'altro settore dove viene studiata la scelta sociale, si sa che la soddisfazione personale è non solo riferita al valore dei propri averi, ma anche al valore di essi rispetto alla media delle nostre cerchie. L'influenza del fattore di confronto rispetto alla media è stata definitivamente chiarita in modo quantitativo nel lavoro dei due premi Nobel per l'economia Kahneman e Tversky (Tversky e Kanemann, 1974). Questa è una delle ragioni per le quali è stato introdotta, nella teoria del voto, la nuova dimensione della varianza (Contucci et al. 2015):

$$\sigma(c) = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[d(v_i, c) - \mu(c)]^2}$$

Con questa è possibile analizzare con uno strumento risolutivo aggiuntivo la situazione di voto polarizzata appena descritta. Nel piano di assi μ e σ esso risulta dalla seguente figura:



Si comprende subito che la scelta basata solo sul criterio della media, fondata su un vantaggio di un punto percentuale, non risulta ben motivata rispetto a quella che considera piccole fluttuazioni. La soluzione $R > P > L$ ha infatti una deviazione standard tre volte più piccola e come tale risulta avere una stabilità molto superiore. Il concetto di stabilità presentato sino ad ora è solo intuitivo ma può essere reso pienamente rigoroso come stabilità rispetto a fluttuazioni di varia natura che includono ripetizione del voto. Quello che è emerso dagli studi fatti che includono calcoli e simulazioni (Contucci et al. 2015) ha mostrato che soluzioni altamente egalitarie (a basso valore di σ) sono più stabili. Il contributo principale del lavoro appena illustrato è che la scelta sociale e il raggiungimento del consenso non possono essere delegate a semplici algoritmi. Il policy maker avrà sempre la responsabilità di individuare la direzione, in termini tecnici, su cui spostarsi nella frontiera di Pareto che emerge in un problema di ottimizzazione bi-dimensionale. La situazione è simile a quella che emerge in teoria della scelta economica

nell'ottimizzazione del portfolio (Markowitz, 1952) in cui la scelta degli investimenti viene fatta non solo in termini di ritorno (μ) ma anche di rischio (σ), e nell'allocazione delle risorse (Brandt et Al, 2016).
Concludiamo ribadendo che i campi in cui Condorcet considerava le applicazioni del calcolo delle probabilità alla scienze sociali vanno ben oltre alla teoria della scelta sociale e in includono l'elenco dato da Langrange e Laplace nella loro lezione introduttiva: le valutazioni giuridiche, la statistica di morti e nascite, le assicurazioni etc.

5. La carenza di cultura matematico-probabilistica in Italia

Condizione necessaria per una partecipazione dei cittadini alla vita politica e civile e in particolare all'utilizzo di strumenti di scelta come quelli proposti da Condorcet è quella di un minimo di nozioni di valutazione quantitativa, in particolare strumenti di probabilità. Qual è il livello di cultura probabilistica nel nostro paese? E perché risulta cosi complessa e controintuitiva la teoria della probabilità? Alcuni studi (Gillies, 2000) cercano di spiegare questo fatto con la necessità di usare, nelle sue derivazioni rigorose, nozioni superiori di algebra e analisi. Questa spiegazione risulta parziale e solo diretta agli studi avanzati della disciplina. La tesi per cui propendiamo qui invece è di natura cognitiva piuttosto che tecnica: dalla prima infanzia il cervello ha un naturale periodo di addestramento attraverso esperimenti di natura geometrica quali il movimento nello spazio a tre dimensioni e lo spostamento di oggetti. Quelli che hanno osservato il senso di meraviglia che prova un bambino di pochi mesi nel ruotare un cubetto di Lego possono capire di cosa si sta parlando. Il bambino, anche se allo stadio preliminare, sta sperimentando delle proprietà algebriche e geometriche del gruppo delle rotazioni in tre dimensioni. Ovviamente la dimostrazione dei teoremi su quel tema sarà tutt'altro mestiere ma l'evidenza sperimentale acquisita durante quegli anni avrà delle conseguenze importanti in seguito. L'esempio appena fatto ha il solo scopo di mettere di evidenza la profonda differenza tra lo sviluppo di un intuito geometrico e algebrico con quello probabilistico: non ci sono occasioni per impratichirsi con la struttura della probabilità in età prescolare ed è piuttosto plausibile che questo fatto abbia conseguenze negative in seguito come handicap per la formazione di intuito probabilistico.
Si parte dunque con poco intuito nel calcolo delle probabilità e solo un insegnamento ben strutturato può sopperire in seguito. Servirebbe quindi che i professionisti formassero insegnanti di ogni livello con buone conoscenze nel settore ma purtroppo questo non `e mai avvenuto nel nostro paese, forse perché nei curricula universitari quella disciplina ha sempre avuto un ruolo marginale, quasi accessorio. Il risultato del test Invalsi 2013/2014 ha mostrato una situazione molto critica (Contucci, Riga, 2015) per la scuola dell'obbligo: la probabilità è raramente insegnata e in quei pochi casi quasi sempre in modo inefficiente. La frequenza e il tipo di errori fatti dagli studenti, spesso peggiori

di risposte a caso, mostrano quanto forte sia la paura verso l'argomento. Mostrano inoltre che se una minoranza degli studenti ha avuto una blanda infarinatura della disciplina, quasi nessuno di essi ha avuto `a un insegnamento con una chiara presentazione della sua struttura logico deduttiva che dagli assiomi derivi le conseguenze più profonde.
Una volta poi sviluppata la materia prima, cioè i docenti propriamente formati, la trasmissione della disciplina non sarebbe difficilissima, ma avrebbe certamente bisogno di sviluppare metodi didattici elementari opportuni. Certamente la via sperimentale `e una via maestra.
Il fatto che gli esperimenti in matematica siano uno strumento didattico rilevante non è una nozione proprio comune ma può essere trovata, occasionalmente, in ogni livello dell'istruzione a cominciare dai docenti delle scuole dell'infanzia (come in alcune Montessori) fino alle medaglie Fields (Thurston, 1990). Esperimenti in probabilità non sono facilmente eseguibili. Giocare a dadi o lanciare monete sono esempi molto limitati e possono solo stabilire un minimo di linguaggio in uno stadio preliminare di studio. Le leggi più profonde invece sono nascoste ed emergono solo dopo moltissime ripetizioni delle prove. L'accessibilità di esperimenti per osservarle si è presentata solo dopo la rivoluzione industriale fino divenire popolare solo nell' era informatica con l'ausilio di simulazioni al calcolatore. Questo strumento è la grande occasione per permettere una veloce introduzione dei concetti probabilistici a scuola. La digitalizzazione capillare nella vita dei giovani potrebbe essere utilizzata a tale scopo. Su internet infatti, e quindi su un cellulare di fascia medio alta, è possibile utilizzando applets eseguire test di illustrazione delle leggi dei grandi numeri, del teorema di centrale etc. Ad un livello appena più avanzato il metodo di Monte Carlo può permettere di individuare le cifre successive di pi greco ed altri risultati anche più raffinati. Attraverso la prova e la ripetizione qualche futuro scienziato potrebbe scoprire in quella occasione la passione per la ricerca. Per tutti gli altri un po' di familiarità con la disciplina aiuterebbe a fare scelte sociali ed economiche meglio informate e più sagge.

Ringraziamenti

Il contenuto tecnico di questo lavoro proviene dai lavori in collaborazione con i colleghi E. Panizzi, F. Ricci Tersenghi, C. Riga e A. Sîrbu che ringrazio. Un ringraziamento in particolare va alla Dott. Alina Sîrbu non solo per le tavole e le figure che compaiono in questa nota tratte del seminario "Reaching consensus. How Mathematics can make your opinion count" che abbiamo tenuto in collaborazione alla New York University di Shanghai nel novembre 2014, ma soprattutto per le numerose interazioni che ho avuto con lei sul tema trattato che sono risultate sempre illuminanti.

Bibliografia

Brandt, F., Conitzer, V., Endriss, U., Lang, J., & Procaccia, A. D. (Eds.) (2016). *Handbook of Computational Social Choice*. Cambridge: CUP.

Condorcet, Marquis de Jean-Antoine-Nicolas de Caritat (1794). *Esquisse d'un tableau historique de progrès de l'esprit humain*.

Contucci, P., & Riga, C. (2015). The lack of probability culture in Italy. *Toward an international comparative research program, 49*(6), 2325–2330.

Contucci, P., Panizzi, E., Ricci-Tersenghi, F., & Sîrbu, A. (2015). Egalitarianism in the rank aggregation problem: a new dimension for democracy. *Quality & Quantity*, 1–16.

Gillies, D. (2000). *Philosophical Theories of Probability*. London, Routledge.

Gini, C. (1914). L'uomo medio. *Giornali degli economisti e rivista di statistica*, *48*, 1–24.

Liquid Feedback, Wikipedia: https://it.wikipedia.org/wiki/LiquidFeedback

Llull, R. (1232–1315). *Manuscripts Ars notandi, Ars eleccionis, and Alia ars eleccionis*.

Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection, *Journal of Finance* 7, 77–91.

Papadimitriou, C. (1994). *Computational Complexity* (1st ed.). Addison Wesley.

Thurston, W. (1990). Mathematical Education. *Notices of the American Mathematical Society*, *37*, 844–850.

Tversky, A., & Kahneman, D. (1974) Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases. *Science, New Series, 185*(4157), 1124–1131.