Il Metodo Sperimentale in Matematica

Pierluigi Contucci
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna

1. *Anima* ed evidenza sperimentale

Questa breve nota introduttiva ha l'intento di fare alcune semplici osservazioni sul concetto di metodo sperimentale in matematica. Prima di illustrarle è utile e suggestivo richiamare una frase, ormai celebre, del fisico americano Richard Feynman. Questi osservando la fotografia di una galassia disse «chi non vede in essa la forza di gravità non ha un anima». Al di la del tono faceto che gli era congeniale il grande premio Nobel (Fisica, 1965) esprime in quella frase la sua fiducia sulla forza dell'evidenza sperimentale della realtà fisica. Senza addentrarci in discussioni epistemologiche la questione che ci poniamo ora è la seguente: c'è in matematica una realtà sperimentale? Come interagisce essa con la struttura portante della disciplina che si articola in assiomi, dimostrazioni e teoremi? Che ruolo ha la sperimentazione in matematica nella didattica?

2. Sperimentare con la matematica

La sperimentazione in matematica e in tutte le discipline scientifiche avviene a molti livelli. Si può dire che ogni seria indagine scientifica proceda per tentativi e aggiustamenti. Il senso tuttavia che vogliamo dare al termine sperimentale in questo contesto è preciso e circoscritto. Volendolo riassumere intendiamo occuparci di quella sperimentazione in matematica che ha lo scopo di "verificare" risultati noti e "scoprire" risultati nuovi. Una buona sperimentazione matematica dovrebbe avere il ruolo che ha un buon laboratorio di fisica. In quest'ultimo le leggi fisiche note vengono verificate e quelle nuove ricercate. Nello stesso modo la sperimentazione matematica verifica teoremi noti nella fase didattica e ricerca indicazioni su congetture nella fase di investigazione. Questo lato dell'indagine scientifica rimane sostanzialmente parallelo alla procedura di ipotesi, tesi e dimostrazione e ne fornisce un supporto indipendente [per approfondimenti si veda William Thurston (Medaglia Fields, 1982) e Epstein, Levi].

3. Il caso della probabilità e il teorema del limite centrale

In questa sede illustriamo il metodo sperimentale nella sua fase didattica. Il caso che vogliamo trattare con qualche dettaglio è quello di una parte della matematica che sta acquisendo un ruolo sempre più importante cioè la probabilità. Il teorema del limite centrale è a buona ragione considerato il primo risultato profondo della teoria dato che elucida l'emergere di regolarità

da un grande numero di eventi puramente causali. Quel teorema ha avuto la sua prima dimostrazione nello storico lavoro di Laplace. Essa richiede solo nozioni di analisi elementare ma che purtroppo non appartengono al bagaglio culturale della scuola superiore e neppure dei corsi di laurea a parte quelli delle scienze dure (matematica, fisica, ingegneria). Il teorema afferma che, sotto ragionevoli ipotesi, una somma di un gran numero di variabili aleatorie opportunamente normalizzata ha un distribuzione di probabilità Gaussiana, la celebre curva a campana.
L'esperimento che studiamo consiste di lanci di un gruppo di monete (k monete) ripetuti un certo di numero di volte (n lanci). Dopo averlo descritto ne eseguiamo alcune istanze con l'ausilio di un piccolo simulatore, un *applet.* Esso consiste di un programma in Java col quale si interagisce attraverso un browser internet e il cui utilizzo non richiede nessuna nozione informatica pregressa. La simulazione si avvia con un *click* e l'esito viene illustrato col grafico di un istogramma nello schermo.
Ciascuna moneta ha il numero 1 al posto della testa e il numero -1 al posto della croce. Dopo ogni lancio del gruppo di k monete si sommano algebricamente i numeri (1 o -1) che appaiono. Un evento sperimentale quindi consisterà degli n valori ottenuti per la somma dei +1 e -1 in ciascuno degli n lanci delle k monete. Con quei valori faremo un istogramma. Iniziamo a lanciare due monete (k=2) una sola volta (n=1). L'istogramma consisterà di una singola barra verticale su uno dei possibili esiti di somma: -2, 0, e +2. Facendo crescere il numero n dei lanci l'istogramma che per n piccoli oscilla in modo casuale andrà progressivamente a stabilizzarsi su quello con tre barre di cui una di altezza .25 posizionata sul -2, una alta .5 sullo 0, e una .25 sul +2. Il regime dei grandi numeri è stato raggiunto ma l'istogramma non mostra particolare struttura a parte la sua simmetria. Ripetiamo ora l'esperimento con cento monete e iniziamo a fare crescere il numero dei lanci. Quando n vale 100 possiamo vedere che al ripetersi dell'esperimento gli istogrammi successivi non si somigliano particolarmente gli uni con gli altri (Fig. 1a e 1b). Non si è chiaramente raggiunto il regime dei grandi numeri. Ma quando n tocca i 1000 o i 10000 la curva dell'istogramma si avvicina sempre più a quella di una Gaussiana. Quando n arriva a 1000000 la somiglianza con la curva a campana è tale che esperimenti indipendenti danno istogrammi indistinguibili (Fig. 2a e 2b). L'evidenza della Gaussiana in un istogramma siffatto risulta più convincente di quella della forza di gravità in una galassia!

4. Riflessioni critiche

Nonostante sia ovvio conviene subito precisare che un simile uso del calcolatore non fornisce "una dimostrazione" del teorema che si stava indagando. Il metodo logico deduttivo non ammette infatti sostituti anche se in taluni casi alcune parti di dimostrazioni sono state "assistite" dalla macchina. Risulta altresì chiaro che un laboratorio di matematica siffatto soffre di alcune limitazioni. Tra le altre quella che se il programma di simulazione contiene qualche errore l'esperimento non sarà fedele a quello reale, al lancio cioè di centinaia di monete reali ripetuto un milione di volte. Questo limite ad una analisi attenta è però meno severo di quanto possa apparire. Infatti lo stesso esperimento se fatto nella realtà con un apparato "fisico" ha un rischio di errore non più piccolo di quello elettronico. Le monete non saranno perfettamente simmetriche tanto quanto il generatore di numeri casuali non sarà perfettamente centrato nello zero. I lanci successivi di monete non saranno completamente indipendenti tanto quanto il generatore di numeri causali non sarà completamente scorrelato su diverse istanze. L'apparato fisico che conduce le monete dalla teca al tavolo di lancio potrebbe favorire errori sistematici non meno di quanto il programma scritto per elaborare i dati possa contenere errori nel codice.

Nell'esperienza dell'autore il metodo della simulazione al calcolatore per avvicinare gli studenti alle leggi fondazionali della teoria della probabilità si è rivelato molto efficace. Il basso costo dell'esperimento e la sua facile realizzabilità e riproducibilità ne fanno uno strumento molto versatile. Ma il pregio principale è quello di permettere di mostrare fatti rilevanti nel loro intero contenuto non solo senza doverne dare necessariamente una dimostrazione logico-deduttiva ma soprattutto senza introdurre la formalizzazione del linguaggio che spesso è il vero ostacolo iniziale all'apprendimento.

Ringraziamenti

L'interesse dell'autore per i metodi sperimentali in matematica ha avuto un grande impulso dopo aver seguito le lezioni di "Geometry and Topology" di Bill Thurston alla University of California, Davis.

L'applet per l'esperimento sul teorema limite centrale (si veda il testo di probabilità dell'autore con Stefano Isola) è stato realizzato con la collaborazione tecnica di Nicoletta Bruno e Ignacio Gallo.

L'autore desidera ringraziare Bruno D'Amore per l'invito a tenere un seminario al convegno "Incontri con la Matematica" (Castel San Pietro, 2009) di cui questa nota è un breve sunto.

Bibliografia

Epstein D., Levy S. (1994). Experimentation and prof in Mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 30 (2), 161-177.

Feymann R. (1965). *The character of physical law*. Modern Library, Boston.

P-Thurston W. (1990). Mathematical Education. *Notices of the American Mathematical Society.* 37, 7, 844-850.

P-Thurston W. (1994). On proof and Progress in Mathematics. *Bulleting of the American Mathemaical Society*. 30 (2), 161-177.

Contucci P. Isola S. (2008). *Probabilità Elementare. Teoria ed Esperimenti.* Bologna: Zanichelli.

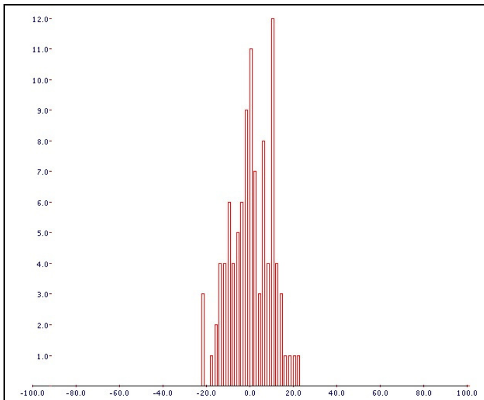

Fig. 1a

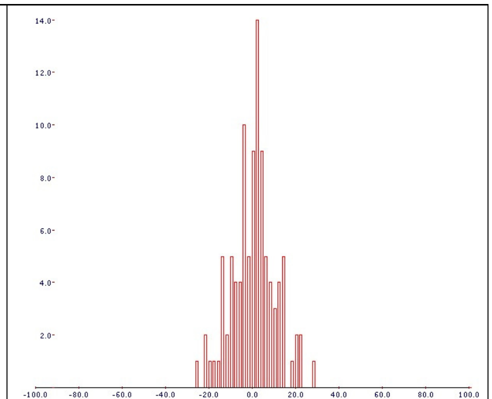

Fig. 1b

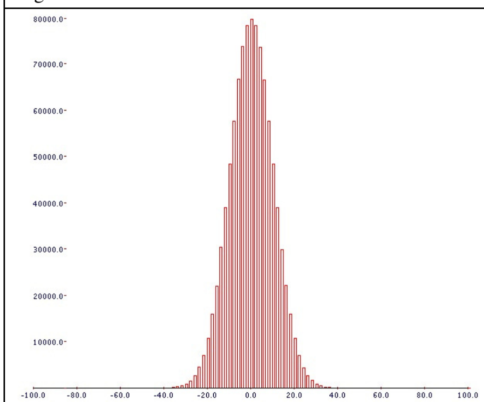

Fig. 2a

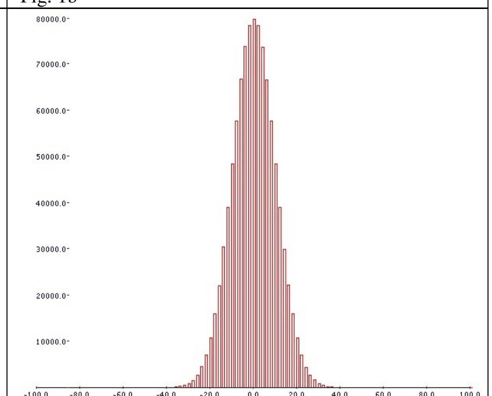

Fig. 2b

Parole chiave: sperimentazione in matematica; simulazioni al calcolatore.