

# Insegnare la Probabilità. Come (?) e perché (!)

**Pierluigi Contucci**

*Dipartimento di Matematica, Università di Bologna*

**Abstract.** *Some of the hows and whys about teaching probability are considered. After a quick historical introduction we identify as a main issue the lack of probabilistic culture in the country. Some possible reasons for the intrinsic difficulties of the discipline are discussed and ideas on how to teach it are proposed. Novel perspectives beyond classical motives on why teaching probability are shortly outlined.*

## 1. Le origini del perché

«Si esportano infine i principi del calcolo delle probabilità. In tempi in cui tutti i cittadini sono chiamati a decidere delle loro sorti e di quelle dei loro simili, è per loro importante conoscere i principi di una scienza che fa apprezzare, nel modo più esatto possibile, la probabilità delle scelte e quella dei fatti. È importante soprattutto imparare a non fidarsi delle intuizioni, anche delle più verosimili. A questo scopo non c'è nulla di più adatto della teoria delle probabilità, dove spesso i risultati rigorosi contraddicono le intuizioni. D'altra parte, le numerose applicazioni di questa teoria, alla natalità e alla mortalità, alle elezioni e alle assicurazioni, che occorre perfezionare ed estendere ad altri aspetti della società, la rendono una delle parti più utili delle conoscenze umane» (Dhombres, 1992).

Quella appena citata è la parte conclusiva della lezione inaugurale di Laplace e Lagrange (la presentò il primo mentre il secondo gli sedeva accanto) al primo corso di Matematica dell'Ecole Normale di Parigi. Era il 20 gennaio 1795, il Primo Piovoso dell'Anno III nel calendario della Rivoluzione Francese. Negli oltre due secoli che ci separano da allora la probabilità ha vissuto uno sviluppo poderoso sia nella struttura interna che, in parallelo, nelle applicazioni. Essa fornisce per esempio gli strumenti per la deduzione delle leggi termodinamiche a partire da quelle meccaniche attraverso i metodi della meccanica statistica. Essa sta inoltre alla base del gigantesco lavoro di razionalizzazione che la Fisica Matematica ha operato nell'alveo della fisica teorica nella seconda metà del secolo scorso in particolare nella teoria dei campi, dalla altissime alla basse energie. In tempi recenti inoltre talune sue formulazioni assiomatiche in termini di variabili aleatorie, quali l'assioma di simmetria (Freiling, 1986), si sono inaspettatamente intrecciate agli assiomi costitutivi della matematica quali quello del continuo (Mumford, 2000): «Per oltre due millenni la logica Aristotelica ha regolato il pensiero degli intellettuali occidentali. Tutte le teorie esatte, i metodi scientifici, persino gli stessi modelli di pensiero si sono uniformati, in linea di principio, alla sua

stringente disciplina. Ma dalle sue oscure origini nel cercare strategie al gioco d'azzardo o nel contare cadaveri nella Londra medioevale, la teoria della probabilità e la statistica inferenziale emergono ora come nuove e migliori fondamenta per i modelli scientifici, specialmente quelli sui processi del pensiero, e come ingrediente essenziale della matematica e dei suoi fondamenti. Noi crediamo che questo cambiamento di prospettiva influenzerà tutta la matematica del prossimo secolo».

La rilevanza della probabilità dentro la matematica è perciò indiscussa. Viene quindi naturale domandarsi perché essa sia insegnata poco, e quel poco in modo inefficace. A chi ne dubitasse basterà ricordare che siamo il paese con il più alto indice di sforzo economico per il gioco d'azzardo (6 Euro giocati ogni 100 Euro guadagnati). Anche se la scarsa conoscenza dei rudimenti di probabilità non spiega da sola quel dato, è fuori di dubbio che essa incida fortemente su di esso. Nella scelta se giocare o no d'azzardo non è tanto infatti la incapacità di fare il calcolo esatto dei casi favorevoli su quelli possibili che favorisce il proliferare virulento dei giochi. Pochi sono i matematici professionisti che eseguono quel calcolo anche se di fatto esso non richiede grandi capacità tecniche. Quel che manca al giocatore medio è la conoscenza delle leggi dei grandi numeri nel loro contenuto culturale e non tecnico. Per intenderci uno che si ostina a guadagnare con l'azzardo non è molto diverso da quello che si ostina a costruire una macchina che si muova di moto perpetuo di prima o seconda specie. Un fisico con una cultura scientifica robusta sa che non si osservano violazioni del primo o del secondo principio della termodinamica, così come un matematico sa che non ci sono numeri ritardatari e che a vincere sarà sempre il banco.

## **2. La probabilità e la sua intrinseca difficoltà. Come alleggerirle**

Come insegnare la probabilità è un problema molto complesso e non ci sono ricette risolutive ma, al meglio, qualche buona idea. Prima di indicarne alcune che in tempi recenti hanno avuto una veloce diffusione è utile fare alcune osservazioni per individuare le origini di questa difficoltà. Osserviamo anzitutto che gli ostacoli che si incontrano nello studio della geometria sono di natura diversa da quelle che si hanno con la probabilità. Una analisi tecnica di tali difficoltà (Gillies, 2000) le attribuisce alla necessità di utilizzare, nello studio dei principali teoremi, nozioni di algebra superiore oltre che di analisi. Tale argomentazione tuttavia rende ragione solo degli ostacoli di studio in fase avanzata. Simili ostacoli appaiono altresì anche in fase preliminare e sono di natura combinatoria. La nostra tesi qui è diversa e di natura psicologico-cognitiva più che strettamente tecnico-scientifica: noi siamo "obbligati" a fare esperimenti di natura geometrica nell'infanzia, come muoverci nelle tre dimensioni e manipolare oggetti tridimensionali. Chi ha osservato lo stupore di un bambino che osserva un cubo colorato facendolo ruotare con la mano

comprende quel che stiamo dicendo. In quel gesto c'è, in forma quanto si voglia embrionale, lo studio di proprietà geometriche e algebriche elementari e meno elementari. La dimostrazione formale di teoremi in età scolare sarà tutt'altra cosa ma almeno una qualche forma di evidenza sperimentale potrà avere un effetto nel futuro. Quel che vogliamo sottolineare in questa sede è che nel caso della probabilità non abbiamo occasione di fare esperimenti in età prescolare e questo conduce ad un handicap negli studi superiori soprattutto per quanto riguarda lo sviluppo dell'intuizione probabilistica. Quello che vogliamo proporre è di introdurre esperimenti in età scolare.

Ma cos'è un esperimento in probabilità? Non è la probabilità forse parte della matematica? Parlare di esperimento in matematica è blasfemo? L'esperimento in matematica ha la stessa rilevanza che ha nelle altre scienze e gli esempi a riguardo vanno (soprattutto!) dai bravi maestri elementari alle medaglie Fields (Thurston, 1990). In probabilità lanciare qualche moneta o dado è, per quanto a lungo lo si faccia, non solo noioso ma ancora piuttosto povero di suggerimenti sulla struttura della disciplina. Gli esperimenti con la probabilità necessitano di milioni di lanci con centinaia di monete e si sono resi disponibili solo in epoca industriale. Un riflesso di questo intrinseco handicap nello studio della probabilità è presente anche nella sua storia all'interno della matematica. Mentre per esempio la geometria ha ricevuto il suo battesimo ufficiale con gli assiomi di Euclide in epoca Tolemaica (circa 300 a.C.) la probabilità è stata assiomatizzata negli anni trenta del secolo scorso (Kolmogorov, 1933).

I metodi di insegnamento della probabilità a livello superiore, diciamo universitario, non sono molto diversi da quelli delle altre branche della matematica o della fisica. Durante l'età evolutiva invece sarebbe importantissimo che gli studenti venissero esposti a una serie di esperimenti in quella disciplina di difficoltà via via crescente. Questi potrebbero iniziare proprio dai conteggi elementari con monete, dadi etc. L'utilità di vedere come il gioco puramente casuale, e non di abilità, non permetta nessun tipo di previsione e non ammetta nessuna strategia vincente avrebbe un impatto fortissimo nel prevenire tendenze patologiche al gioco d'azzardo in età adulta. Gli esperimenti potrebbero condurre gradualmente alla scoperta e al test delle leggi dei grandi numeri. Ovviamente questo può avvenire solo con l'ausilio del calcolatore, e tra gli effetti collaterali della informatizzazione capillare dei giovani e dell'uso di internet non sarebbe male valorizzare quelli a scopi educativi. Una breve interrogazione sul vostro motore di ricerca preferito permette di trovare decine di simulatori di lanci di monete, di dadi, in numeri arbitrariamente grandi, e di aghi e freccette e via discorrendo. Si può così visualizzare la legge dei grandi numeri, il teorema limite centrale, il metodo Monte Carlo, e sperimentare e studiare e ripetere e rivedere e congetturare e testare ancora e ancora. Un futuro scienziato potrebbe scoprire lì di avere il sacro fuoco della passione per la ricerca scientifica dura, provando e

riprovando. Dopo aver giocato a lungo con dadi, monete e soprattutto simulato con la macchina i necessari milioni di lanci per avvicinarsi al cuore della probabilità si potrà sperare che gli assiomi della teoria suscitino un qualche interesse nel tentare di raggiungere col metodo deduttivo quei teoremi che cristallizzino le osservazioni effettuate.

### **3. I perché antichi e nuovi: le applicazioni alle scienze socio-economiche**

Grazie a Laplace e Lagrange dunque la probabilità venne inserita nel programma di matematica e da allora sarebbe diventata argomento di studio in tutti i licei di Francia dato che la Scuola Normale aveva il preciso compito di formare gli insegnanti della scuola superiore del paese. Il fatto che la Francia abbia ancora un primato mondiale nella produzione di risultati di eccellenza nel campo della probabilità e della matematica in generale fa capire quanto siano preziosi e duraturi gli investimenti fatti sulla scuola di qualità e al tempo stesso quanto sia lungo il cammino per il raggiungimento della necessaria robustezza culturale.

Rileggendo le motivazioni per l'insegnamento della probabilità espresse in quella prima lezione sorprende notare che sono quasi tutte di natura socio-economica e persino politica nel senso più nobile del termine. Ciò nonostante i successi della teoria delle probabilità sono rimasti di fatto lontani da quelle applicazioni, se si prescinde da alcune eccezioni, e sono soprattutto stati raggiunti nelle scienze dure. Le ragioni dell'efficacia del linguaggio probabilistico nelle scienze dure sono chiare. Sono ancora da capire le ragioni del perché la probabilità non sia entrata in modo altrettanto forte nelle scienze socio-economiche. L'avvenuto scollamento tra le scienze dure e quelle umane individua solo vagamente l'origine del problema.

Certamente una delle cause di questo rallentamento nel progetto di Laplace e Lagrange sta nel fatto che gli strumenti tecnici necessari per le applicazioni della probabilità alle scienze socio-economiche sono molto complessi e hanno fatto capolino nel panorama scientifico solo di recente. Nelle ultime due o tre decadi tuttavia, soprattutto ad opera di studi nella fisica teorica, nuovi strumenti sono stati messi a punto e ora sono pronti per affrontare alcuni di quei temi in cui la "complessità" non solo non può essere ignorata ma è elemento costitutivo del problema stesso.

In probabilità un problema è facile quando le variabili aleatorie che lo caratterizzano sono indipendenti. Un problema si avventura in campi via via più complessi quando queste variabili non solo non sono indipendenti, ma interagiscono in modo casuale. Un esempio concreto può essere utile. Sempre più spesso assistiamo a eventi di natura repentina e inaspettata. Non solo quelli naturali come terremoti o uragani, ma soprattutto quelli di natura socio-economica. Le crisi economiche scaturiscono quasi sempre nella modalità che viene chiamata "endogena". Una crisi esogena sarebbe quella che potrebbe verificarsi in Argentina in conseguenza di un eventuale tracollo del sistema

economico Cinese. Conoscendo infatti che l'agricoltura Argentina è trainata dalla vendita della soia alla Cina una crisi con effetto domino non sarebbe una sorpresa. Quel che accade spesso invece sono crisi senza cause esterne e senza che nessuno degli indicatori economici tradizionali subisca variazioni brusche. Di fronte a tali eventi l'Economia classica si ritira, si nasconde. Sbirciando tra gli assunti dell'economia classica si trovano infatti principi come quelli di indipendenza degli agenti economici. Chi abbia un minimo di nozioni di probabilità sa che l'indipendenza delle variabili aleatorie per un determinato problema conduce inevitabilmente all'assenza di discontinuità endogene quali quelle invece osservate nell'economia reale. L'economia e le scienze sociali dunque necessitano di un radicale cambio di paradigma (Bouchaud, 2008): rinunciare ad assunti non testati e tornare ai dati sperimentali. Nelle scienze socio-economiche gli "agenti", siano essi individui o società, o famiglie, sono in continua interazione. La natura di tale interazioni dipende da un così alto numero di fattori che una prima modellizzazione che voglia giungere a un qualche risultato quantitativo potrà considerarle come aleatorie (Stanley, 2008).

### **Bibliografia**

- Dhombres J. (1992). *Leçons de mathématiques. L'École normale de l'an III*, Laplace, Lagrange, Monge. Paris: Éditions Dunod.
- Freiling C. (1986). Axioms of symmetry: throwing darts at the real number line. *The Journal of Symbolic Logic*. 51 (1), 190-200.
- Mumford D. (2000). The Dawning of the Age of Stochasticity. *Rend. Mat. Acc. Lincei*. s. 9, fasc. spec. 107, 197-218.
- Gillies D. (2000). *Philosophical Theories of Probability*. London, Routledge.
- Thurston W. (1990). Mathematical Education. *Notices of the American Mathematical Society*. 37, no. 7, 844-850
- Kolmogorov A. (1956). *Foundations of the Theory of Probability*. New York: Chelsea. (Originally in russian, 1933).
- Bouchaud J.P. (2008). Economics need a scientific revolution. *Nature*. vol 455, 1181-1183
- Stanley E. (2008). Econophysics and the current economic turmoil. *American Physical Society News*. Vol.17, N. 11, The Back Page.

**Parole chiave:** didattica della probabilità; sperimentazione matematica; probabilità e scienze socio-economiche.