Convoluzione di distribuzioni

Cerchiamo di definire la convoluzione di due distribuzioni.

Ovviamente nel caso in cui le due distribuzioni siano associate a funzioni di cui è definita la convoluzione, per esempio a funzioni sommabili, questa definizione dovrà coincidere con quella di convoluzione tra funzioni. Per questo motivo studiamo anzitutto la convoluzione di funzioni dal punto di vista delle distribuzioni.

Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. La loro convoluzione $f * g$ è definita ponendo

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy\ .$$

Sappiamo che anch'essa è una funzione sommabile su $\mathbb{R}$.

Consideriamo f, g e $f * g$ come distribuzioni.

Se $v \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ allora

$$\begin{aligned}\langle f * g, v\rangle &= \left\langle \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\,dy, v(x)\right\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\,dy\ v(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)\int_{\mathbb{R}} g(x-y)v(x)\,dx\ dy\end{aligned}$$

e, ponendo $x = z + y$ nell'integrale interno,

$$= \int_{\mathbb{R}} f(y)\int_{\mathbb{R}} g(z)v(z+y)\,dz\ dy\ ,$$

dove si verifica facilmente che lo scambio dell'ordine di integrazione è lecito.

Questa uguaglianza suggerisce come estendere la definizione di convoluzione alle distribuzioni: date $f, g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ cerchiamo di definire la distribuzione convoluzione ponendo, per $v \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle f * g, v\rangle = \big\langle f(x), \langle g(y), v(x+y)\rangle\big\rangle\ .$$

Verifichiamo se quanto scritto sopra ha senso e se definisce una distribuzione.

Anzitutto osserviamo che $\langle g(y), v(x+y)\rangle$ è il valore della distribuzione g in corrispondenza della funzione test ottenuta da v traslando l'argomento di x, quindi è un numero che dipende da x. In questo modo risulta definita una funzione φ tale che per $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\varphi(x) = \langle g(y), v(x+y)\rangle\ .$$

Con questa notazione

$$\big\langle f(x), \langle g(y), v(x+y)\rangle\big\rangle = \langle f, \varphi\rangle\ ;$$

$\langle f, \varphi\rangle$ è definito quando φ è una funzione test, cioè è C^∞ a supporto compatto.

Verifichiamo anzitutto che φ sia di classe C^∞.

Fissato $x \in \mathbb{R}$, il rapporto incrementale di φ in x è:

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} &= \frac{\langle g(y), v(x+h+y)\rangle - \langle g(y), v(x+y)\rangle}{h} \\ &= \left\langle g(y), \frac{v(x+h+y)-v(x+y)}{h} \right\rangle .\end{aligned}$$

Dobbiamo calcolare il limite di questo rapporto incrementale quando h tende a 0.

La funzione

$$y \mapsto \frac{v(x+h+y)-v(x+y)}{h}$$

tende a $y \mapsto v'(x+y)$ puntualmente, se ciò è vero anche in $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, allora abbiamo

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \left\langle g(y), \frac{v(x+h+y)-v(x+y)}{h} \right\rangle = \langle g(y), v'(x+y)\rangle ,$$

quindi φ è derivabile con derivata $\langle g(y), v'(x+y)\rangle$.

Dimostriamo che

$$\lim_{h\to 0} \frac{v(x+h+y)-v(x+y)}{h} = v'(x+y) ;$$

in $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Cioè verifichiamo che, per h vicino a 0, le funzioni

$$y \mapsto \frac{v(x+h+y)-v(x+y)}{h}$$

hanno il supporto contenuto in uno stesso compatto e qualunque sia $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} \left| \frac{d^n}{dy^n} \left(\frac{v(x+h+y)-v(x+y)}{h} - v'(x+y) \right) \right| \xrightarrow[h\to 0]{} 0 .$$

Studiamo anzitutto il supporto della funzione

$$y \mapsto \frac{v(x+h+y)-v(x+y)}{h} .$$

Esso è contenuto nell'unione dei supporti delle funzioni $y \mapsto v(x+h+y)$ e $y \mapsto v(x+y)$.

Sia $[-a,a]$ un intervallo contenente $\operatorname{supp} v$; il supporto della funzione $y \mapsto v(x+y)$ è incluso nell'intervallo $[-x-a,-x+a]$, mentre quello della funzione $y \mapsto v(x+h+y)$ è incluso nell'intervallo $[-x-h-a,-x-h+a]$, quindi il supporto della funzione che stiamo considerando è incluso in

$$[-x-a,-x+a] \cup [-x-h-a,-x-h+a] .$$

Per $h \in [-1,1]$ tale insieme è incluso in

$$\left[\min_{h\in[-1,1]} (-x-h-a), \max_{h\in[-1,1]} (-x-h+a) \right] = [-x-1-a,-x+1+a] .$$

Quindi esiste un intervallo compatto che contiene il supporto di tutte le funzioni

$$y \mapsto \frac{v(x+h+y)-v(x+y)}{h}$$

per $h \in [-1,1]$.

Verifichiamo che

$$\sup_{y\in\mathbb{R}}\left|\frac{v(x+h+y)-v(x+y)}{h}-v'(x+y)\right|\xrightarrow[h\to 0]{}0\,.$$

Per il teorema del valor medio, esiste t_h, compreso tra 0 e h tale che

$$\frac{v(x+h+y)-v(x+y)}{h}=v'(x+t_h+y)$$

e quindi, applicando nuovamente il teorema del valor medio, esiste τ_h compreso tra 0 e t_h (e quindi tra 0 e h) tale che

$$\frac{v(x+h+y)-v(x+y)}{h}-v'(x+y)=v'(x+t_h+y)-v'(x+y)=t_h v''(x+\tau_h+y)\,.$$

Visto che t_h è compreso tra 0 e h, si ha $|t_h|\le|h|$ e quindi

$$\left|\frac{v(x+h+y)-v(x+y)}{h}-v'(x+y)\right|=|t_h||v''(x+\tau_h+y)|\le|h|\|v''\|_\infty\,,$$

perciò

$$\sup_{y\in\mathbb{R}}\left|\frac{v(x+h+y)-v(x+y)}{h}-v'(x+y)\right|\le|h|\|v''\|_\infty\xrightarrow[h\to 0]{}0\,.$$

In modo del tutto analogo si ottiene che, per t_h e τ_h opportuni,

$$\frac{d^n}{dy^n}\left(\frac{v(x+h+y)-v(x+y)}{h}-v'(x+y)\right)=t_h v^{(n+2)}(x+\tau_h+y)$$

e quindi

$$\sup_{y\in\mathbb{R}}\left|\frac{d^n}{dy^n}\left(\frac{v(x+h+y)-v(x+y)}{h}-v'(x+y)\right)\right|\le|h|\|v^{(n+2)}\|_\infty\xrightarrow[h\to 0]{}0\,.$$

Abbiamo così dimostrato che, in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$y\mapsto\frac{v(x+h+y)-v(x+y)}{h}\xrightarrow[h\to 0]{}y\mapsto v'(x+y)\,,$$

perciò possiamo concludere che esiste

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left\langle g(y),\frac{v(x+h+y)-v(x+y)}{h}\right\rangle=\langle g(y),v'(x+y)\rangle$$

e quindi φ è derivabile su $\mathbb{R}$ e $\varphi'(x)=\langle g(y),v'(x+y)\rangle$.

Poiché v' ha le stesse proprietà di v, il ragionamento fatto per φ può essere ripetuto per la funzione φ' e per tutte le derivate successive, quindi φ è di classe C^∞.

In generale però il supporto di φ non è compatto.

Ad esempio se g è la distribuzione associata alla funzione che vale identicamente 1 allora

$$\varphi(x) = \langle 1, v(x+y) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v(x+y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} v(y)\, dy \,,$$

quindi in questo caso φ è una funzione costante, se v ha integrale diverso da 0 questa costante è non nulla, perciò $\operatorname{supp} \varphi = \mathbb{R}$.

Per capire quali condizioni possono assicurare che φ abbia supporto compatto, esaminiamo il caso in cui g è una funzione.

Se il supporto di g e il supporto di $y \mapsto v(x+y)$ sono disgiunti allora

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) v(x+y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} 0\, dy = 0 \,.$$

Se $\operatorname{supp} g$ è compatto, ciò è vero per qualunque $v \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ purché $|x|$ sia grande. Infatti sia $\operatorname{supp} g \subseteq [-b, b]$ e $\operatorname{supp} v \subseteq [-a, a]$; in tal caso il supporto di $y \mapsto v(x+y)$ è incluso in $[-x-a, -x+a]$. L'intersezione di due intervalli è vuota quando il secondo estremo di uno dei due è minore del primo estremo dell'altro. Quindi in questo caso l'intersezione dei due supporti è vuota se $-x+a < -b$ oppure $b < -x-a$. La prima condizione equivale a $x > a+b$, mentre la seconda equivale a $x < -a-b$, quindi se $|x| > a+b$ si ha $\varphi(x) = 0$. Perciò φ ha supporto compatto.

Questa osservazione assicura che $\big\langle f(x), \langle g(y), v(x+y) \rangle \big\rangle$ è definito qualunque sia $v \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, se $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ e $g \in L^1(\mathbb{R})$ con $\operatorname{supp} g$ compatto; in tal modo si ottiene un funzionale su $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. È evidente che tale funzionale è lineare e si può verificare senza troppa difficoltà che esso è continuo e quindi definisce una distribuzione.

Abbiamo in questo modo definito $f * g$ quando f è una distribuzione e g è una funzione a supporto compatto.

Per cercare di estendere questa definizione al caso in cui g è una distribuzione occorre definire il supporto di una distribuzione.

La definizione di supporto di una funzione non può essere direttamente utilizzata per le distribuzioni, perché il supporto di una funzione dipende dal valore che la funzione assume in un punto, e il valore di una distribuzione in un punto non è definito. Perciò la definizione di supporto di una distribuzione è più complessa e richiede una definizione preliminare.

Definizione. Siano $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ e $]a, b[\subseteq \mathbb{R}$.

Diciamo che f **è nulla** su $]a, b[$ quando qualunque sia $v \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, tale che $\operatorname{supp} v \subseteq]a, b[$, si ha $\langle f, v \rangle = 0$.

Nel caso che f sia una distribuzione associata a un funzione localmente sommabile, questa condizione equivale a chiedere che f sia nulla q.d. su $]a, b[$.

Definizione. Sia $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

Chiamiamo **supporto** di f e indichiamo con $\operatorname{supp} f$ l'insieme

$$\operatorname{supp} f = \mathbb{R} \setminus \bigcup \big\{]a, b[\;\big|\; f \text{ è nulla su }]a, b[\big\} \,.$$

Quindi $\operatorname{supp} f$ è il complementare dell'unione di tutti gli intervalli su cui f è nulla.

Si può dimostrare che, se f è una funzione continua, allora il supporto nel senso delle distribuzioni è uguale al supporto nel senso delle funzioni.

Come nel caso delle funzioni, per ogni $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ e $v \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ se $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} v = \varnothing$ allora $\langle f, v\rangle = 0$.

Esempio. Determiniamo il supporto della distribuzione δ.

Cerchiamo anzitutto quali sono gli intervalli su cui δ è nulla.

Dato un intervallo $]a,b[$, se $0 \notin]a,b[$ allora per ogni $v \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ tale che $\operatorname{supp} v \subseteq]a,b[$ si ha $0 \notin \operatorname{supp} v$ e quindi $v(0) = 0$, perciò $\langle \delta, v\rangle = 0$; ciò significa che δ è nulla in $]a,b[$.

Se invece $0 \in]a,b[$ è facile costruire una funzione v tale che $\operatorname{supp} v \subseteq]a,b[$ e $v(0) \neq 0$, quindi $\langle \delta, v\rangle \neq 0$ e in questo caso δ non è nulla in $]a,b[$.

Quindi δ è nulla in $]a,b[$ se e solo se $0 \notin]a,b[$, perciò l'unione degli intervalli su cui δ è nulla coincide con $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Il supporto è il complementare di questo insieme, quindi $\operatorname{supp} \delta = \{0\}$.

Come per le funzioni, abbiamo:

Teorema. *Sia* $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. *Allora* $\operatorname{supp} f' \subseteq \operatorname{supp} f$.

Dimostrazione Per dimostrare questa inclusione è sufficiente dimostrare che se f è nulla su un certo intervallo allora anche f' è nulla su tale intervallo; infatti da ciò segue che

$$\bigcup \{\,]a,b[\mid f \text{ è nulla su }]a,b[\,\} \subseteq \bigcup \{\,]a,b[\mid f' \text{ è nulla su }]a,b[\,\}$$

e, passando al complementare, otteniamo $\operatorname{supp} f' \subseteq \operatorname{supp} f$.

Supponiamo quindi che f sia nulla su $]a,b[$; allora qualunque sia $v \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ con $\operatorname{supp} v \subseteq]a,b[$ si ha

$$\operatorname{supp} v' \subseteq \operatorname{supp} v \subseteq]a,b[\,,$$

quindi $\langle f, v'\rangle = 0$, perciò $\langle f', v\rangle = -\langle f, v'\rangle = 0$. Ciò significa che f' è nulla su $]a,b[$. □

Come visto nel caso in cui g è una funzione sommabile, se $g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ ha supporto compatto allora per ogni $v \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ la funzione φ definita da

$$\varphi(x) = \langle g(y), v(x+y)\rangle$$

ha supporto compatto.

Ciò può essere dimostrato, come nel caso in cui g è una funzione, sfruttando la proprietà che se $\operatorname{supp} g \cap \operatorname{supp} v = \varnothing$ allora $\langle g, v\rangle = 0$.

Perciò se $f, g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ e $\operatorname{supp} g$ è compatto allora qualunque sia $v \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ è definito $\big\langle f(x), \langle g(y), v(x+y)\rangle \big\rangle$. In questo modo è definito un funzionale su $\mathscr{D}(\mathbb{R})$; si può dimostrare che il funzionale è lineare continuo e quindi definisce una distribuzione.

Abbiamo così definito la convoluzione di una distribuzione con una distribuzione a supporto compatto.

Se f e g sono entrambe distribuzioni a supporto compatto, allora risultano definite sia $f * g$ che $g * f$; si può dimostrare che, come nel caso delle funzioni, le due convoluzioni coincidono.

Esempio. Sia $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$; calcoliamo $f * \delta$.

Abbiamo visto che $\operatorname{supp} \delta = \{0\}$, perciò δ ha supporto compatto, quindi se $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ è definita la convoluzione $f * \delta$. Si ha:

$$\langle f * \delta, v \rangle = \langle f(x), \langle \delta(y), v(x+y) \rangle \rangle = \langle f(x), v(x) \rangle$$

e quindi

$$f * \delta = f \, .$$

Esempio. Sia $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$; calcoliamo $f * \delta'$.

Sappiamo che $\operatorname{supp} \delta' \subseteq \operatorname{supp} \delta = \{0\}$, quindi $\operatorname{supp} \delta'$ è compatto.

Si ha:

$$\langle f * \delta', v \rangle = -\langle f(x), \langle \delta(y), v'(x+y) \rangle \rangle = -\langle f(x), v'(x) \rangle = \langle f'(x), v(x) \rangle$$

e quindi

$$f * \delta' = f' \, .$$

Dai due esempi precedenti segue che $(f * \delta)' = f * \delta'$. Questo è un caso particolare del teorema seguente.

Teorema. *Siano* $f, g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, *con* $\operatorname{supp} g$ *compatto.*

Allora $(f * g)' = f' * g = f * g'$.

Dimostrazione Per ogni $v \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ si ha

$$\begin{aligned} \langle (f * g)', v \rangle &= -\langle f * g, v' \rangle = -\langle f(x), \langle g(y), v'(x+y) \rangle \rangle = \\ &= \langle f(x), \langle g'(y), v(x+y) \rangle \rangle = \langle f * g', v \rangle \, . \end{aligned}$$

Quindi $(f * g)' = f * g'$.

Abbiamo già dimostrato che la funzione $x \mapsto \langle g(y), v(x+y) \rangle$ è derivabile con derivata $x \mapsto \langle g(y), v'(x+y) \rangle$, quindi abbiamo

$$\begin{aligned} \langle (f * g)', v \rangle &= -\langle f(x), \langle g(y), v'(x+y) \rangle \rangle = -\left\langle f(x), \frac{d}{dx} \langle g(y), v(x+y) \rangle \right\rangle = \\ &= \langle f'(x), \langle g(y), v(x+y) \rangle \rangle = \langle f' * g, v \rangle \, . \end{aligned}$$

Quindi $(f * g)' = f' * g$. $\square$

Questa proprietà della derivata di una convoluzione vale anche per la convoluzione di funzioni, in tal caso sono necessarie ipotesi aggiuntive sulla derivabilità di una delle due funzioni di cui si fa la convoluzione; invece ogni distribuzione è derivabile, quindi non è richiesta nessuna ulteriore ipotesi.

È utile definire $f * g$ anche in casi in cui g non ha supporto compatto, ciò richiede di dare significato a $\langle f, \varphi \rangle$ anche quando φ non ha supporto compatto; occorre quindi esaminare la possibilità di estendere una distribuzione (cioè un funzionale su $\mathscr{D}(\mathbb{R})$) ad uno spazio più grande.

Osserviamo che data $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ se $w \in C^\infty(\mathbb{R})$ vale identicamente 1 su un aperto A contenente $\operatorname{supp} f$ allora $wf = f$, cioè qualunque sia $v \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ si ha $\langle f, wv \rangle = \langle f, v \rangle$. Infatti in questo caso se $x \in A$ allora

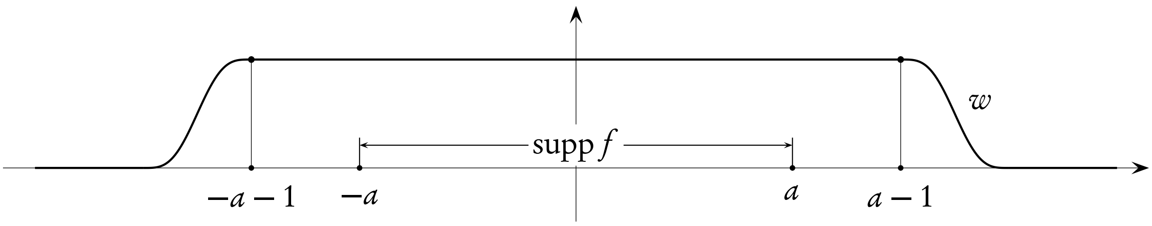
$$w(x)v(x) - v(x) = v(x) - v(x) = 0\,,$$

perciò $\operatorname{supp}(wv - v) \cap A = \varnothing$, ma $\operatorname{supp} f \subseteq A$, quindi $\operatorname{supp}(wv - v) \cap \operatorname{supp} f = \varnothing$. Da ciò segue che $\langle f, wv - v \rangle = 0$ e quindi, come detto, $\langle f, wv \rangle = \langle f, v \rangle$.

Ricordiamo che l'uguaglianza $\langle f, wv \rangle = \langle f, v \rangle$ vale quando $v \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$: nel caso che $\operatorname{supp} f$ sia compatto, è possibile scegliere w con il supporto compatto, perciò qualunque sia $v \in C^\infty(\mathbb{R})$ si ha $wv \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ e quindi $\langle f, wv \rangle$ è definito.

Questa osservazione suggerisce la possibilità di estendere in modo naturale una distribuzione a supporto compatto a un funzionale definito su $C^\infty(\mathbb{R})$ in questo modo: se $\operatorname{supp} f \subseteq [-a, a]$ scegliamo una funzione $w \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ tale che $w(x) = 1$ per $x \in \,]-a-1, a+1[$. Con questa scelta di w, per ogni $v \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$ poniamo

$$\langle \tilde{f}, v \rangle = \langle f, wv \rangle\ .$$



In questo modo abbiamo definito il funzionale lineare $\tilde{f}$, definito su $C^\infty(\mathbb{R})$ che estende la distribuzione f, visto che per le osservazioni precedenti se $v \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ si ha

$$\langle \tilde{f}, v \rangle = \langle f, wv \rangle = \langle f, v \rangle\ .$$

Notiamo che la definizione data non dipende dalla scelta di w, perché se w_1 è un'altra funzione con le stesse proprietà di w allora per $x \in \,]-a-1, a+1[$ si ha

$$w(x)v(x) - w_1(x)v(x) = v(x) - v(x) = 0\,,$$

perciò $\operatorname{supp}(wv - w_1 v) \cap [-a, a] = \varnothing$, quindi $\operatorname{supp}(wv - w_1 v) \cap \operatorname{supp} f = \varnothing$ e abbiamo $\langle f, wv - w_1 v \rangle = 0$, cioè $\langle f, wv \rangle = \langle f, w_1 v \rangle$.

In generale, quando non sarà importante fare distinzioni, indicheremo il funzionale esteso a C^∞ con lo stesso simbolo che indica la distribuzione.

Esempio. Abbiamo già visto che $\operatorname{supp} \delta$ è compatto, quindi possiamo estendere δ a un funzionale definito su C^∞.

Scelta $w \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ che vale 1 su $]-1, 1[$, l'estensione $\tilde{\delta}$ di δ è tale che per $v \in C^\infty(\mathbb{R})$ si ha

$$\langle \tilde{\delta}, v \rangle = \langle \delta, wv \rangle = w(0)v(0) = v(0)\,,$$

quindi $\tilde{\delta}$ è definita nello stesso modo di δ.

Abbiamo visto che qualunque siano $g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ e $v \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ la funzione

$$x \mapsto \langle g(y), v(x+y) \rangle$$

è di classe C^∞. Perciò se $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ ha supporto compatto, utilizzando l'estensione di f a C^∞ appena vista, è definito $\big\langle f(x), \langle g(y), v(x+y) \rangle \big\rangle$ e quindi si può definire la convoluzione $f * g$.

Ricordando come abbiamo esteso una distribuzione a supporto compatto a un funzionale sullo spazio delle funzioni C^∞, la convoluzione risulta definita da:

$$\langle f * g, v \rangle = \big\langle f(x), \langle g(y), w(x) v(x+y) \rangle \big\rangle$$

dove $w \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ e vale 1 su un aperto contenente $\operatorname{supp} f$.

Esempio. Sia $g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$; calcoliamo $\delta * g$.

Ricordando che l'estensione di δ a C^∞ è definita da $\langle \delta, v \rangle = v(0)$, abbiamo

$$\langle \delta * g, v \rangle = \big\langle \delta(x), \langle g(y), v(x+y) \rangle \big\rangle = \langle g(y), v(0+y) \rangle = \langle g, v \rangle$$

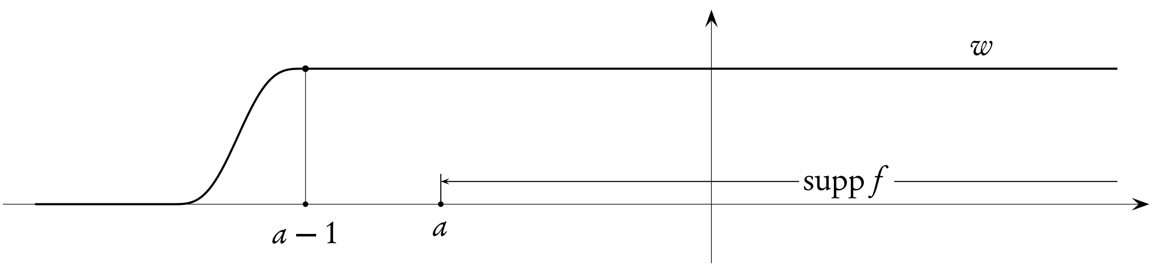
e quindi

$$\delta * g = g\ .$$

Avevamo già visto che $f * \delta = f$, quindi abbiamo verificato in questo caso che la convoluzione è commutativa.

Il procedimento utilizzato per estendere una distribuzione a supporto compatto a un funzionale sullo spazio C^∞, consente, più in generale, di estendere una distribuzione f a tutte le funzioni $v \in C^\infty(\mathbb{R})$ tali che $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} v$ è compatto.

Ad esempio, se $\operatorname{supp} f$ è inferiormente limitato, cioè $\operatorname{supp} f \subseteq [a, +\infty[$ per un a opportuno, allora la condizione che $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} v$ sia compatto è soddisfatta se e solo se $\operatorname{supp} v$ è superiormente limitato. Procedendo in modo simile al caso in cui $\operatorname{supp} f$ è compatto, scegliamo $w \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$ che vale identicamente 1 su $]a-1, +\infty[$ e con supporto inferiormente limitato.



Anche in questo caso se $v \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ allora $\langle f, v \rangle = \langle f, wv \rangle$; inoltre se $v \in C^\infty$ ha supporto superiormente limitato allora $\operatorname{supp}(wv)$ è compatto e quindi possiamo estendere il funzionale f a tali v ponendo

$$\langle \tilde{f}, v \rangle = \langle f, wv \rangle\ .$$

Se g ha il supporto inferiormente limitato, allora qualunque sia $v \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, la funzione φ, definita da $\varphi(x) = \langle g(y), v(x+y) \rangle$, ha supporto superiormente limitato.

Infatti se $\operatorname{supp} g \subseteq [b,+\infty[$ e $\operatorname{supp} v \subseteq [-a,a]$ allora la funzione $x \mapsto v(x+y)$ ha supporto incluso in $[-a-x,a-x]$, questo insieme è disgiunto da $\operatorname{supp} g$ se $a-x<b$, cioè se $x>a-b$; perciò per $x>a-b$ si ha $\langle g(y), v(x+y)\rangle = 0$, quindi il supporto di tale funzione è incluso in $]-\infty, a-b]$.

Perciò se, oltre al $\operatorname{supp} g$, anche $\operatorname{supp} f$ è inferiormente limitato utilizzando l'estensione di f si può definire $\langle f, \varphi\rangle$.

In questo modo si definisce la convoluzione di due distribuzioni aventi entrambi il supporto inferiormente limitato.

Analogamente è possibile definire la convoluzione di due distribuzioni aventi entrambe supporto superiormente limitato.

L'uguaglianza $(f*g)' = f'*g = f*g'$ vale non solo nel caso già visto in cui $\operatorname{supp} g$ è compatto, ma anche in tutti gli altri casi in cui è possibile definire la convoluzione.

Vediamo un esempio di utilizzo della convoluzione tra distribuzioni per la risoluzione di equazioni differenziali.

Consideriamo una equazione differenziale ordinaria a coefficienti costanti di ordine n:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j y^{(j)} = f\,, \tag{1}$$

con $a_j \in \mathbb{R}$ (o $a_j \in \mathbb{C}$), $a_n = 1$, f funzione o distribuzione e y la funzione o distribuzione incognita.

Supponiamo di conoscere una soluzione g dell'equazione (1) nel caso $f = \delta$. Se la convoluzione $f*g$ è definita allora abbiamo

$$\sum_{j=0}^{n} a_j (f*g)^{(j)} = \sum_{j=0}^{n} a_j f*g^{(j)} = f*\sum_{j=0}^{n} a_j g^{(j)} = f*\delta = f\,.$$

Perciò se si conosce una soluzione g dell'equazione differenziale (1) con termine noto la distribuzione δ, allora si conosce una soluzione per tutti i termini noti per cui è definita la convoluzione con g.

Una $g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ tale che $\sum_{j=0}^{n} a_j y^{(j)} = \delta$ è detta **soluzione fondamentale** dell'operatore $\sum_{j=0}^{n} a_j \dfrac{d^j}{dx^j}$.

Per trovare una soluzione fondamentale studiamo anzitutto il caso più semplice, cioè l'equazione

$$y' = \delta\,. \tag{2}$$

Una funzione che ha come derivata la distribuzione δ è la funzione di Heaviside, definita come

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0\,, \end{cases}$$

infatti si tratta di una funzione costante su $\mathbb{R}^-$ e su $\mathbb{R}^+$, con un salto di ampiezza 1 in 0. Visto che due distribuzioni che hanno la stessa derivata differiscono per una funzione costante, le soluzioni dell'equazione (2) sono le funzioni del tipo $H+c$ dove con c indichiamo la funzione che vale costantemente c ($c \in \mathbb{C}$).

Consideriamo ora l'equazione

$$y' + ay = \delta \ , \tag{3}$$

dove $a \in \mathbb{C}$.

Se g è soluzione di (2) allora, posto $h(x) = e^{\lambda x} g(x)$ si ha

$$h'(x) = \lambda e^{\lambda x} g(x) + e^{\lambda x} \delta(x) = \lambda h(x) + \delta(x)$$

dove nell'ultimo passaggio si è utilizzato il fatto che il prodotto tra una funzione $w \in C^\infty$ e la distribuzione δ coincide con $w(0)\delta$. Scegliendo $\lambda = -a$ si ha $h' + ah = \delta$, cioè h è soluzione dell'equazione (3).

Si vede facilmente che vale anche il viceversa, cioè se la funzione $e^{-ax} g(x)$ è soluzione dell'equazione (3) allora g è soluzione di (2).

Visto che le soluzioni di (2) sono le funzioni $H + c$ con $c \in \mathbb{C}$, possiamo concludere che le soluzioni di (3) sono le funzioni $x \mapsto (H(x) + c)e^{-ax}$ con $c \in \mathbb{C}$.

Come già detto ci interessa la convoluzione di una soluzione con altre funzioni (o distribuzioni), da questo punto di vista la soluzione più interessante è quella che si ottiene per $c = 0$, perché in tal caso il supporto è l'intervallo $[0, +\infty[$, mentre negli altri casi il supporto è $\mathbb{R}$.

Notiamo inoltre che ciascuna soluzione ristretta a $\mathbb{R}^+$ o a $\mathbb{R}^-$ è una funzione C^∞ che è soluzione dell'equazione omogenea associata a (3).

Torniamo ora al caso dell'equazione di ordine n:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j y^{(j)} = \delta \ . \tag{4}$$

Secondo quanto suggerito dallo studio dell'equazione del primo ordine, cerchiamo una soluzione del tipo wH con w soluzione della equazione omogenea associata a (4).

Calcoliamo anzitutto le derivate di questa funzione.

$$(wH)'(x) = w'(x)H(x) + w(x)\delta(x) = w'(x)H(x) + w(0)\delta(x) \ .$$

Abbiamo richiesto che w sia soluzione della equazione omogenea associata a (4), se la scegliamo in modo che sia $w(0) = 0$ risulta $(wH)' = w'H$.

Analogamente

$$(wH)''(x) = (w'H)'(x) = w''(x)H(x) + w'(x)\delta(x) = w''(x)H(x) + w'(0)\delta(x) \ ;$$

se si sceglie w in modo che $w'(0) = 0$ risulta $(wH)'' = w''H$.

Ripetendo questo ragionamento, se $w^{(j)}(0) = 0$ per $j = 0, \ldots, n-2$ allora $(wH)^{(j)} = w^{(j)}H$ per $j = 0, \ldots, n-1$, mentre

$$\begin{aligned}(wH)^{(n)}(x) = (w^{(n-1)}H)'(x) = w^{(n)}(x)H(x) + w^{(n-1)}(x)\delta(x) = \\ = w^{(n)}(x)H(x) + w^{(n-1)}(0)\delta(x) \ .\end{aligned}$$

Otteniamo quindi (ricordando che $a_n = 1$)

$$\sum_{j=0}^{n} a_j (wH)^{(j)} = \sum_{j=0}^{n} a_j w^{(j)} H + w^{(n-1)}(0)\delta = w^{(n-1)}(0)\delta \ ,$$

quindi se si sceglie w in modo che sia $w^{(n-1)}(0) = 1$ allora wH è una soluzione di (4).

Abbiamo così dimostrato che se w è una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{n} a_j w^{(j)} = 0 \\ w(0) = 0 \\ w'(0) = 0 \\ \dots \\ w^{(n-2)}(0) = 0 \\ w^{(n-1)}(0) = 1 \end{cases}$$

allora wH è soluzione dell'equazione (4), cioè è una soluzione fondamentale dell'operatore $\sum_{j=0}^{n} a_j \dfrac{d^j}{dx^j}$.

Questa soluzione fondamentale è una funzione nulla su $\mathbb{R}^-$, quindi ha supporto inferiormente limitato, perciò se f è una distribuzione con supporto incluso in $[0,+\infty[$ allora è definita la convoluzione $(wH) * f$ e tale convoluzione è soluzione dell'equazione non omogenea

$$\sum_{j=0}^{n} a_j y^{(j)} = f \ .$$