Introduzione alle distribuzioni

Talvolta è utile generalizzare il concetto di funzione; ciò può essere dovuto alla necessità di considerare oggetti che per certi aspetti si comportano come funzioni, ma che hanno proprietà che una funzione non può avere, oppure può essere utile fare alcune "operazioni" che sono impossibili nell'ambito delle funzioni (per esempio derivare una funzione non derivabile).

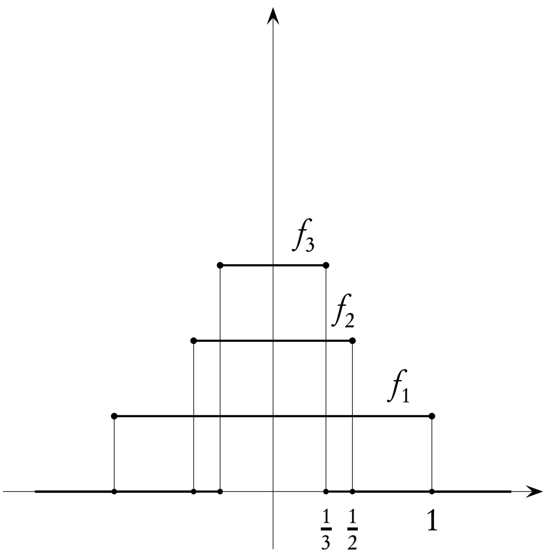
Ad esempio nello studio di alcuni fenomeni fisici è naturale considerare una massa concentrata in un punto; la funzione densità che descrive questa massa è nulla fuori dal punto in cui è concentrata la massa, ma l'integrale della densità è uguale alla massa e quindi è positivo. Limitandoci a sistemi fisici unidimensionali, considerando ad esempio una massa unitaria, siamo così portati a considerare una funzione definita su $\mathbb{R}$, con integrale uguale ad 1, nulla fuori dall'origine. Evidentemente tali richieste non possono essere soddisfatte contemporaneamente: se una funzione è nulla fuori dall'origine, allora è nulla quasi dappertutto e quindi ha integrale uguale a 0. Possiamo però cercare una successione di funzioni che approssimi, in qualche senso che preciseremo successivamente, un oggetto che abbia le due proprietà elencate sopra. Utilizziamo un simbolo per indicare questo oggetto: lo indicheremo con il simbolo δ.

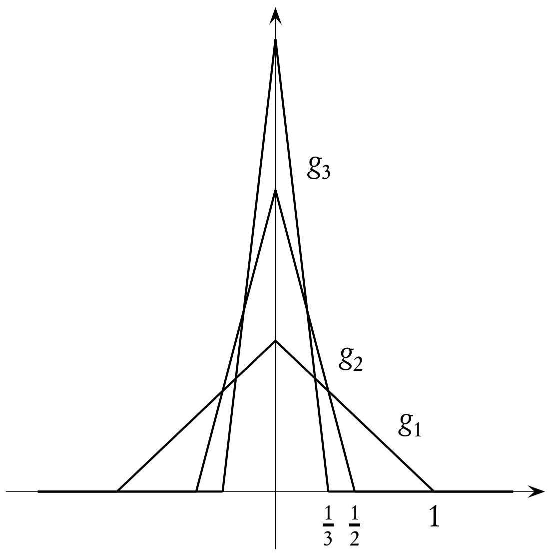
Per esempio possiamo considerare una successione di funzioni f_k (con $k \in \mathbb{N}$ oppure $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) tali che ciascuna f_k abbia integrale uguale a 1, e sia nulla al di fuori di un intervallo contenente 0, con la proprietà che questo intervallo sia piccolo per k grande. Ad esempio possiamo scegliere le funzioni f_k nulle al di fuori dell'intervallo $[-1/k, 1/k]$.

Esempi di successioni di funzioni che hanno queste proprietà sono:

$$f_k = \frac{k}{2}\,\chi_{[-1/k,1/k]}\,,$$

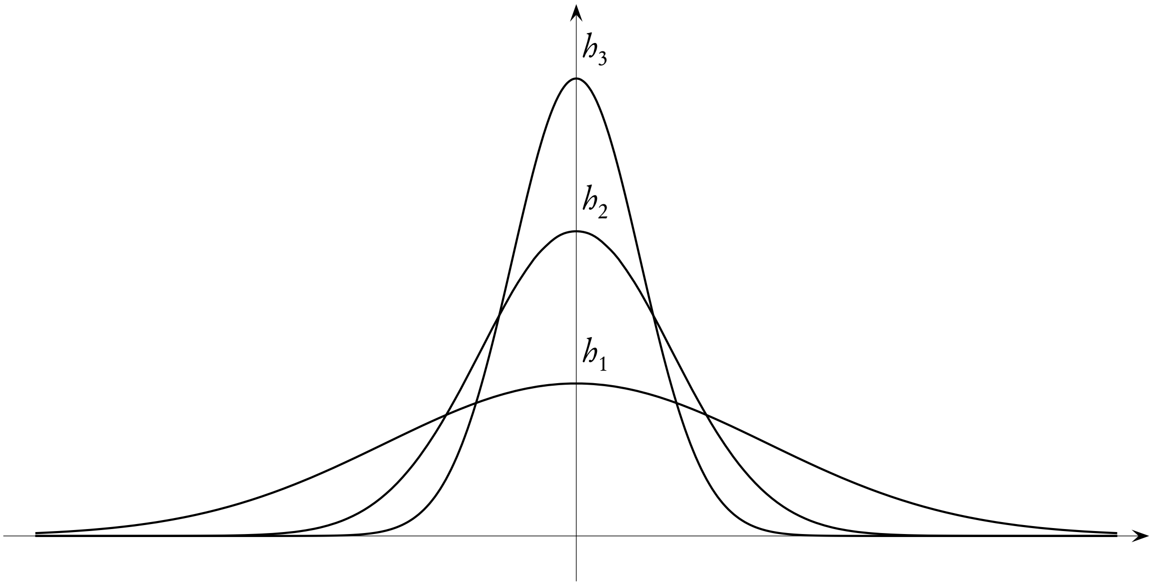
$$g_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| > \dfrac{1}{k} \\ k(1-k|x|) & \text{se } |x| \le \dfrac{1}{k}\,. \end{cases}$$





Possiamo anche considerare una successione di funzioni per cui vale una condizione meno restrittiva di quella che abbiamo richiesto sul supporto; ad esempio possiamo chiedere che la successione converga puntualmente a 0 fuori dall'origine (oltre a soddisfare la condizione sull'integrale). Un esempio di successione di funzioni con questa proprietà è la successione delle funzioni h_k tali che

$$h_k(x) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2x^2} .$$



Naturalmente queste non sono le uniche successioni di funzioni che godono delle proprietà scritte sopra e quindi che, in qualche senso, individuano l'oggetto che abbiamo indicato con δ.

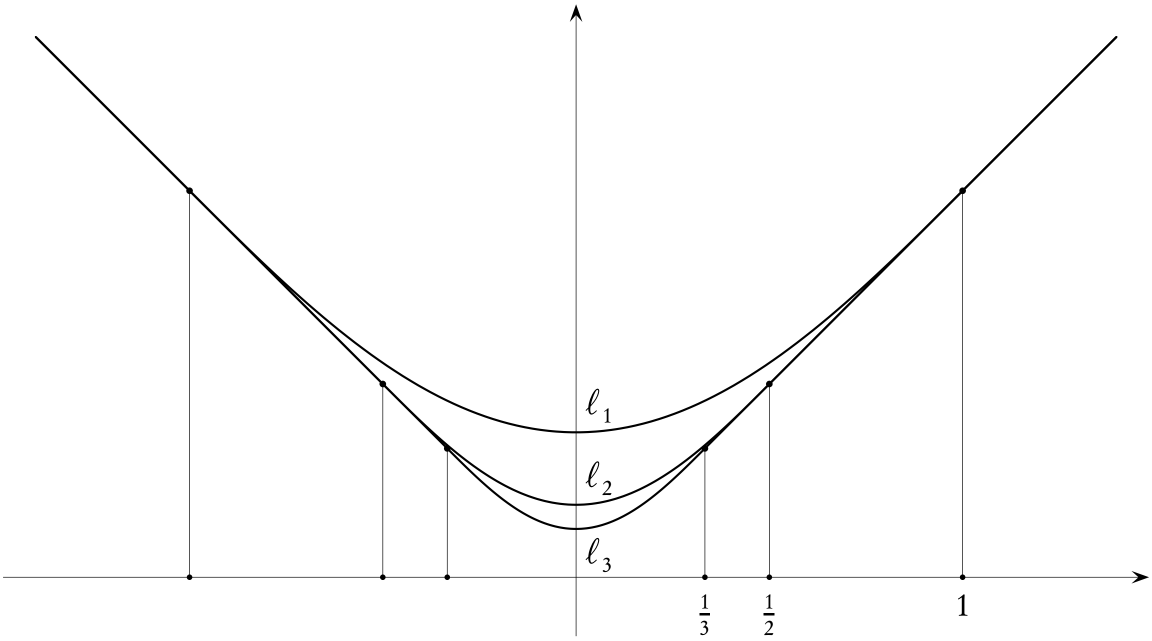
Se vogliamo utilizzare le idee appena esposte, occorre definire rigorosamente il concetto di "approssimare" l'oggetto δ; o per meglio dire dobbiamo stabilire in che senso le nostre successioni di funzioni approssimano questo oggetto. Questo ci consentirà di dare una definizione di δ. Infatti ogni oggetto utilizzato in matematica deve essere definito, cosa non ancora fatta per δ.

Rinviamo ancora le definizioni precise, perché l'idea di individuare un oggetto che non esiste con una successione di funzioni che le cui proprietà si "avvicinano" a quelle dell'oggetto può essere utilizzata anche in altri ambiti.

Cerchiamo di individuare un oggetto che sia la derivata seconda della funzione valore assoluto. La funzione valore assoluto non è derivabile in 0 e quindi non esiste neppure la derivata seconda in tale punto. Approssimiamo la funzione valore assoluto con una funzione di classe C^2. Una possibilità è di considerare una funzione coincidente con il valore assoluto al di fuori dell'intervallo $[-1/k, 1/k]$ e che sia la restrizione di un polinomio sull'intervallo $[-1/k, 1/k]$.

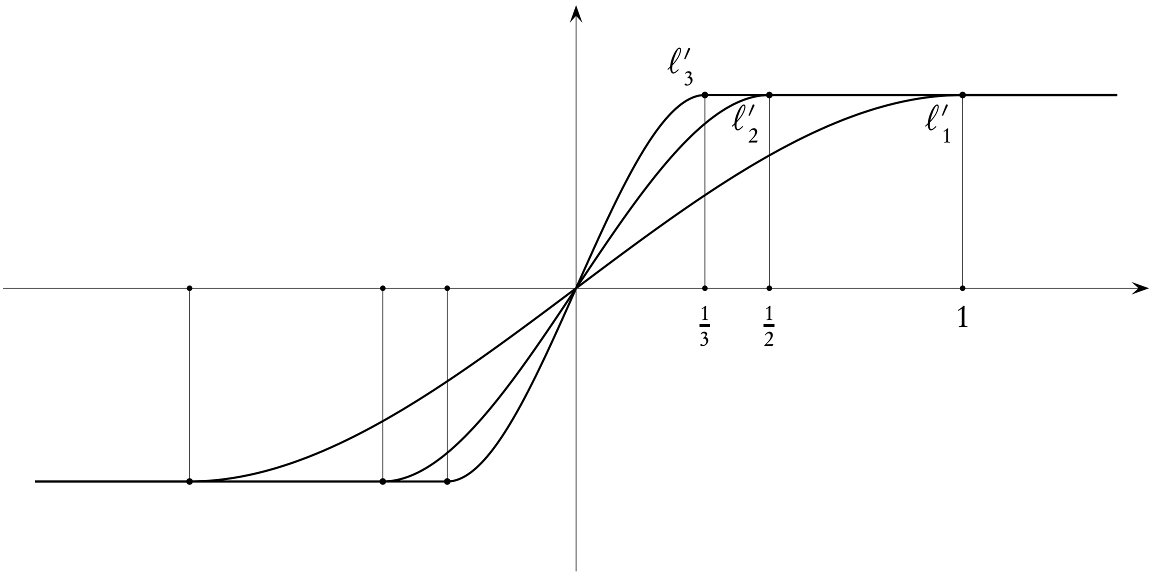
Si verifica facilmente che una funzione che gode di queste proprietà è:

$$\ell_k(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } |x| > \dfrac{1}{k} \\ -\dfrac{k^3}{8}x^4 + \dfrac{3k}{4}x^2 + \dfrac{3}{8k} & \text{se } |x| \le \dfrac{1}{k} . \end{cases}$$

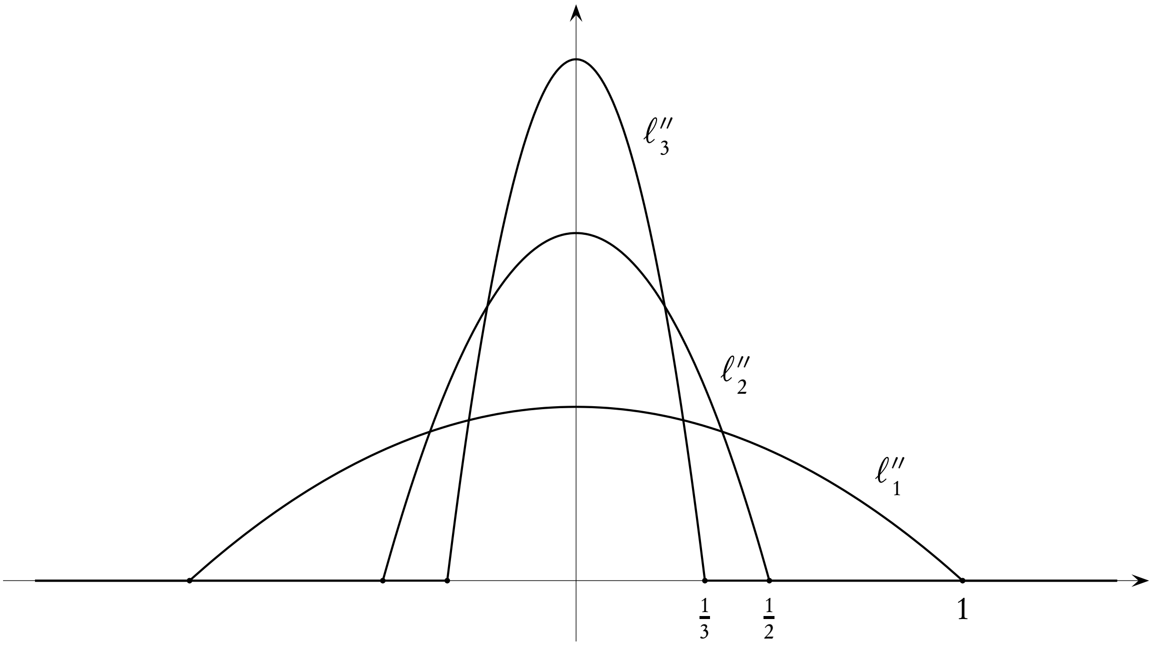


Calcoliamo la derivata prima e seconda delle funzioni ℓ_k. Abbiamo

$$\ell_k'(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x) & \text{se } |x| > \dfrac{1}{k} \\ -\dfrac{k^3}{2}x^3 + \dfrac{3k}{2}x & \text{se } |x| \leq \dfrac{1}{k} \,. \end{cases}$$



$$\ell_k''(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| > \dfrac{1}{k} \\ -\dfrac{3k^3}{2}x^2 + \dfrac{3k}{2} & \text{se } |x| \leq \dfrac{1}{k} \,. \end{cases}$$



Osserviamo che ogni funzione ℓ''_k ha come supporto l'intervallo $[-1/k, 1/k]$ e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ell''_k(x)\,dx = \int_{-1/k}^{1/k} \ell''_k(x)\,dx = \left[\ell'_k(x)\right]_{-1/k}^{1/k} = 1-(-1) = 2\,.$$

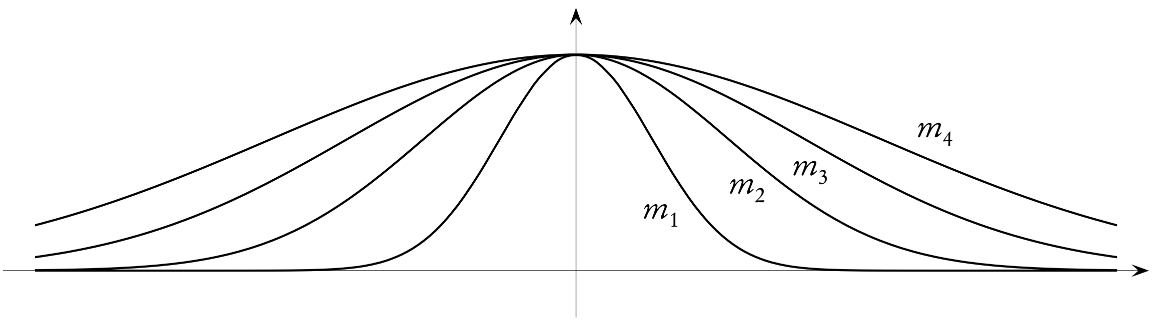
Quindi la successione di funzioni $\ell''_k/2$ ha le proprietà che abbiamo individuato per le successioni di funzioni che approssimano δ .

Esaminiamo un problema diverso.

La funzione costante 1 (con dominio $\mathbb{R}$) non appartiene né a L^1 né a L^2 , quindi non ha trasformata di Fourier secondo le definizioni già viste. Approssimiamo, in qualche senso, questa funzione con una successione di funzioni appartenenti a L^1 .

Ad esempio possiamo considerare la successione di funzioni m_k tali che

$$m_k(x) = e^{-x^2/k^2}\,;$$



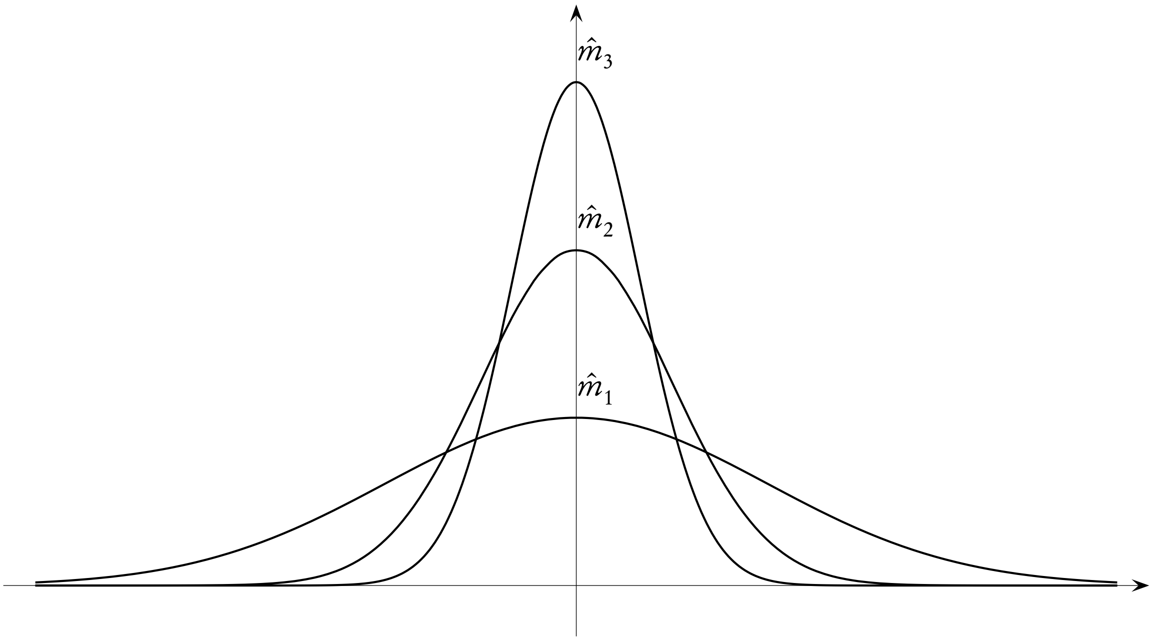
oppure la successione delle funzioni caratteristiche dell'intervallo $[-k, k]$, cioè

$$n_k = \chi_{[-k,k]}\,.$$

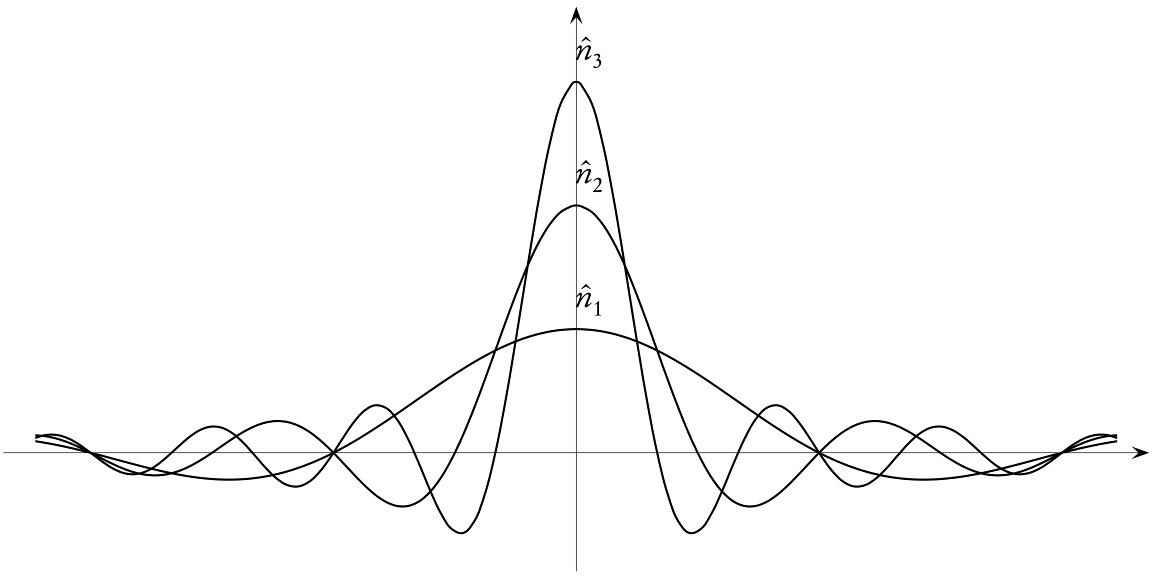
In entrambi i casi si tratta di successioni di funzioni che tendono puntualmente alla funzione costante 1 .

Passando alla trasformata di Fourier abbiamo

$$\hat{m}_k(\omega) = k\sqrt{\pi}\, e^{-k^2\omega^2/4}\,,$$



$$\hat{n}_k(\omega) = 2k \operatorname{sinc}\left(\frac{k\omega}{\pi}\right).$$



Evidentemente per $\omega \neq 0$ si ha

$$\lim_{k\to\infty} \hat{m}_k(\omega) = \lim_{k\to\infty} k\sqrt{\pi}\, e^{-k^2\omega^2/4} = 0$$

inoltre, per le proprietà della trasformata di Fourier,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{m}_k(\omega)\, d\omega = 2\pi m_k(0) = 2\pi\,,$$

quindi abbiamo una successione di funzioni che hanno tutte lo stesso integrale, e la successione tende puntualmente a 0 in ogni punto diverso dall'origine.

Studiamo ora il comportamento di $\hat{n}_k(\omega)$ per k che tende a ∞. Evidentemente se $\omega = 0$ si ha

$$\lim_{k\to\infty} \hat{n}_k(0) = \lim_{k\to\infty} 2k \operatorname{sinc}(0) = \lim_{k\to\infty} 2k = \infty\,,$$

se $\omega = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ si ha

$$\lim_{k\to\infty} \hat{n}_k(n\pi) = \lim_{k\to\infty} 2k \operatorname{sinc}\left(\frac{kn\pi}{\pi}\right) = \lim_{k\to\infty} 2k \frac{\operatorname{sen}(kn\pi)}{kn\pi} = \lim_{k\to\infty} 0 = 0\,.$$

Per tutti i valori di ω che non sono multipli interi di π si può dimostrare che il limite non esiste.

Quindi la successione di funzioni $\hat{n}_k$ non si comporta come la successione degli $\hat{m}_k$.

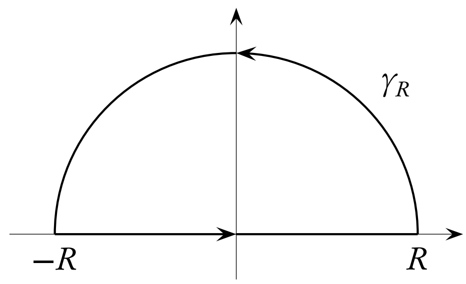
Studiamo l'integrale di $\hat{n}_k$. La funzione sinc non è sommabile su $\mathbb{R}$ (perché non decresce sufficientemente in fretta all'infinito) e quindi $\hat{n}_k$ non è sommabile; ma si può dimistrare che la funzione è integrabile, cioè che esistono reali

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \operatorname{sinc}(x)\,dx\,, \qquad \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^0 \operatorname{sinc}(x)\,dx\,.$$

Calcoliamo

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^R \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\,.$$

Sia γ_R il cammino nel piano complesso costituito dal segmento $[-R, R]$ e dalla semicirconferenza C_R di centro l'origine e raggio R contenuta nel semipiano superiore. Su tale cammino consideriamo l'orientamento antiorario.



Consideriamo la funzione $z \mapsto \dfrac{e^{iz}-1}{z}$; se viene prolungata con i nell'origine essa è olomorfa su $\mathbb{C}$ e quindi

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}-1}{z}\,dz = 0\,.$$

Separando l'integrale sul segmento da quello sulla semicirconferenza, abbiamo

$$\int_{-R}^R \frac{e^{ix}-1}{x}\,dx = -\int_{C_R} \frac{e^{iz}-1}{z}\,dz\,.$$

Ma

$$\int_{-R}^R \frac{e^{ix}-1}{x}\,dx = \int_{-R}^R \frac{\cos x - 1}{x}\,dx + \int_{-R}^R \frac{i \operatorname{sen} x}{x}\,dx = i\int_{-R}^R \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$

perché il primo è l'integrale di una funzione dispari e quindi è nullo.

Inoltre

$$\int_{C_R} \frac{e^{iz}-1}{z}\,dz = \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz - \int_0^{\pi} \frac{1}{Re^{i\theta}} Rie^{i\theta}\,d\theta = \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz - i\pi \xrightarrow[R\to\infty]{} -i\pi$$

perché per il lemma di Jordan l'integrale ha limite 0.

Perciò

$$\lim_{R\to\infty} i\int_{-R}^{R} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}-1}{x}\,dx = -\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}-1}{z}\,dz = i\pi$$

e quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \pi\,.$$

Da ciò segue che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc} x\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} y}{y}\frac{1}{\pi}\,dy = 1\,,$$

e allora

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{n}_k(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} 2k \operatorname{sinc}\left(\frac{k\omega}{\pi}\right)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} 2k\operatorname{sinc}(y)\frac{\pi}{k}\,dy = 2\pi\,.$$

Quindi tutte le $\hat{n}_k$ hanno lo stesso integrale.

Cercare di definire la trasformata di Fourier della funzione che vale costantemente 1 costruendo una successione di funzioni sommabili che la approsima, ha senso solo se le due successioni di funzioni $\hat{m}_k$ e $\hat{n}_k$ individuano lo stesso oggetto. Come abbiamo visto le funzioni $\hat{m}_k$ e $\hat{n}_k$ hanno tutte integrale 2π, ma questo non è sufficiente per sperare che in qualche senso approssimino lo stesso oggetto.

Fortunatamente esiste un'altra proprietà, non troppo complicata da verificare, che accomuna le due successioni.

Data una funzione $v\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua e limitata abbiamo

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{m}_k(\omega)v(\omega)\,d\omega = \lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k\sqrt{\pi}\,e^{-k^2\omega^2/4}v(\omega)\,d\omega$$

e con la sostituzione $y = k\omega/2$ questo è uguale a

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} 2\sqrt{\pi}\,e^{-y^2}v\left(\frac{2y}{k}\right)dy\,.$$

Quando k tende a ∞, $2y/k$ tende a 0, v è continua, quindi la funzione integranda ha limite $2\sqrt{\pi}\,e^{-y^2}v(0)$; inoltre essa è maggiorata da $2\sqrt{\pi}\,e^{-y^2}\sup|v|$ che è sommabile, perciò per il teorema della convergenza dominata abbiamo

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{m}_k(\omega)v(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} 2\sqrt{\pi}\,e^{-y^2}v(0)\,dy = 2\pi v(0)\,.$$

Vediamo se la successione delle $\hat{n}_k$ gode di una proprietà analoga a quella appena vista per la successione delle $\hat{m}_k$.

In questo caso supponiamo che $v\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sia di classe C^1 e a supporto compatto. Questo assicura che v è limitata e misurabile.

Le funzioni $\hat{n}_k$ sono limitate (essendo trasformate di Fourier di funzioni L^1) e v è sommabile, quindi $\hat{n}_k v$ è sommabile. Abbiamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{n}_k(\omega)v(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} 2k\operatorname{sinc}\left(\frac{k\omega}{\pi}\right)v(\omega)\,d\omega$$

e con la sostituzione $y = k\omega$ questo è uguale a

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} 2\operatorname{sinc}\left(\frac{y}{\pi}\right)v\left(\frac{y}{k}\right)dy\\ &= \int_{-2\pi}^{2\pi} 2\operatorname{sinc}\left(\frac{y}{\pi}\right)v\left(\frac{y}{k}\right)dy + \int_{-\infty}^{-2\pi} 2\operatorname{sen} y\,\frac{v\left(\frac{y}{k}\right)}{y}\,dy + \int_{2\pi}^{\infty} 2\operatorname{sen} y\,\frac{v\left(\frac{y}{k}\right)}{y}\,dy\,.\end{aligned}$$

Calcoliamo il limite dell'integrale su $[-2\pi, 2\pi]$. Visto che v è continua, per ogni y abbiamo

$$\lim_{k\to\infty} 2\operatorname{sinc}\left(\frac{y}{\pi}\right)v\left(\frac{y}{k}\right) = 2\operatorname{sinc}\left(\frac{y}{\pi}\right)v(0)$$

e

$$\left|2\operatorname{sinc}\left(\frac{y}{\pi}\right)v\left(\frac{y}{k}\right)\right| \le 2\sup|v|\,.$$

Le funzioni costanti sono sommabili sugli intervalli limitati, quindi possiamo applicare il teorema della convergenza dominata, ottenendo

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-2\pi}^{2\pi} 2\operatorname{sinc}\left(\frac{y}{\pi}\right)v\left(\frac{y}{k}\right)dy = \int_{-2\pi}^{2\pi} 2\operatorname{sinc}\left(\frac{y}{\pi}\right)v(0)\,dy\,.$$

Calcoliamo il limite dell'integrale su $[2\pi, \infty[$. Integrando per parti abbiamo

$$\begin{aligned}&\int_{2\pi}^{\infty} 2\operatorname{sen} y\,\frac{v\left(\frac{y}{k}\right)}{y}\,dy\\ &= \left[2(1-\cos y)\frac{v\left(\frac{y}{k}\right)}{y}\right]_{2\pi}^{\infty} - \int_{2\pi}^{\infty} 2(1-\cos y)\frac{v'\left(\frac{y}{k}\right)\frac{y}{k} - v\left(\frac{y}{k}\right)}{y^2}\,dy\\ &= \int_{2\pi}^{\infty} 2(1-\cos y)\frac{v\left(\frac{y}{k}\right) - v'\left(\frac{y}{k}\right)\frac{y}{k}}{y^2}\,dy\,.\end{aligned}$$

Dalle ipotesi fatte su v segue che

$$\lim_{k\to\infty} 2(1-\cos y)\frac{v\left(\frac{y}{k}\right) - v'\left(\frac{y}{k}\right)\frac{y}{k}}{y^2} = 2(1-\cos y)\frac{v(0)}{y^2}\,,$$

inoltre

$$\left|2(1-\cos y)\frac{v\left(\frac{y}{k}\right)-v'\left(\frac{y}{k}\right)\frac{y}{k}}{y^2}\right| \le \frac{4}{y^2}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|v(x)|+\sup_{x\in\mathbb{R}}|xv'(x)|\right)$$

e questa funzione è sommabile sull'intervallo $[2\pi,\infty[$; perciò, per il teorema della convergenza dominata,

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\int_{2\pi}^{\infty} 2\operatorname{sen} y\,\frac{v\left(\frac{y}{k}\right)}{y}\,dy &= \lim_{k\to\infty}\int_{2\pi}^{\infty} 2(1-\cos y)\frac{v\left(\frac{y}{k}\right)-v'\left(\frac{y}{k}\right)\frac{y}{k}}{y^2}\,dy\\ &= \int_{2\pi}^{\infty} 2(1-\cos y)\frac{v(0)}{y^2}\,dy\,.\end{aligned}$$

Integriamo per parti il limite ottenuto:

$$\begin{aligned}\int_{2\pi}^{\infty} 2(1-\cos y)\frac{v(0)}{y^2}\,dy &= \left[-2(1-\cos y)\frac{v(0)}{y}\right]_{2\pi}^{\infty}+\int_{2\pi}^{\infty} 2\operatorname{sen} y\,\frac{v(0)}{y}\,dy\\ &= \int_{2\pi}^{\infty} 2\operatorname{sen} y\,\frac{v(0)}{y}\,dy\,.\end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{k\to\infty}\int_{2\pi}^{\infty} 2\operatorname{sen} y\,\frac{v\left(\frac{y}{k}\right)}{y}\,dy = \int_{2\pi}^{\infty} 2\operatorname{sen} y\,\frac{v(0)}{y}\,dy\,.$$

In modo del tutto analogo si ha

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{-2\pi} 2\operatorname{sen} y\,\frac{v\left(\frac{y}{k}\right)}{y}\,dy = \int_{-\infty}^{-2\pi} 2\operatorname{sen} y\,\frac{v(0)}{y}\,dy\,.$$

Perciò abbiamo

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{n}_k(\omega)v(\omega)\,d\omega\\ &= \lim_{k\to\infty}\int_{-2\pi}^{2\pi} 2\operatorname{sinc}\left(\frac{y}{\pi}\right)v\left(\frac{y}{k}\right)dy+\lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{-2\pi} 2\operatorname{sen} y\,\frac{v\left(\frac{y}{k}\right)}{y}\,dy\\ &\qquad\qquad+\lim_{k\to\infty}\int_{2\pi}^{\infty} 2\operatorname{sen} y\,\frac{v\left(\frac{y}{k}\right)}{y}\,dy\\ &= \int_{-2\pi}^{2\pi} 2\operatorname{sinc}\left(\frac{y}{\pi}\right)v(0)\,dy+\int_{-\infty}^{-2\pi} 2\operatorname{sen} y\,\frac{v(0)}{y}\,dy+\int_{2\pi}^{\infty} 2\operatorname{sen} y\,\frac{v(0)}{y}\,dy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 2\operatorname{sinc}\left(\frac{y}{\pi}\right)v(0)\,dy\end{aligned}$$

e per quanto visto sopra questo è uguale a $2\pi v(0)$.

Quindi se $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è C^1 a supporto compatto si ha

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{m}_k(\omega) v(\omega)\, d\omega = \lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{n}_k(\omega) v(\omega)\, d\omega = 2\pi v(0)\,.$$

È facile verificare che anche per le tre successioni di funzioni f_k, g_k e h_k che "approssimano" l'oggetto δ vale una proprietà analoga: qualunque sia v continua e limitata si ha

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(x) v(x)\, dx = \lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_k(x) v(x)\, dx = \lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_k(x) v(x)\, dx = v(0)\,.$$

Consideriamo ora le due successioni di funzioni che abbiamo scelto per approssimare la funzione che vale costantemente 1, m_k e n_k.

Se $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è sommabile allora abbiamo

$$|m_k(x) v(x)| = \left| e^{-x^2/k^2} v(x) \right| \le |v(x)|$$

e

$$\lim_{k\to\infty} m_k(x) v(x) = \lim_{k\to\infty} e^{-x^2/k^2} v(x) = v(x)\,,$$

quindi per il teorema della convergenza dominata

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} m_k(x) v(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} v(x)\, dx\,.$$

Analogamente

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n_k(x) v(x)\, dx = \lim_{k\to\infty} \int_{-k}^{k} v(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} v(x)\, dx\,.$$

Anche in questo caso abbiamo due successioni di funzioni m_k e n_k che "approssimano" lo stesso oggetto e risulta

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} m_k(x) v(x)\, dx = \lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n_k(x) v(x)\, dx\,.$$

Questi discorsi ci suggeriscono che le successioni di funzioni che "approssimano" lo stesso oggetto hanno in comune il limite

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(x) v(x)\, dx\,,$$

per v in una certa classe di funzioni; quindi ciascuna di queste successioni individua la stessa funzione che a v (in un certo spazio di funzioni) fa corrispondere un numero reale.

Possiamo a questo punto scordarci della successione approssimante e limitarci a considerare la funzione ottenuta sopra.

I nuovi oggetti che definiremo saranno quindi oggetti che alle funzioni v di un opportuno spazio fanno corrispondere un numero reale. Essi saranno chiamati distribuzioni.

Quanto visto ci suggerisce, ad esempio, che δ è la distribuzione che a ogni v fa corrispondere $v(0)$, mentre la funzione che vale costantemente 1, in questo nuovo ambito, è la distribuzione che a ogni v fa corrispondere il suo integrale su $\mathbb{R}$.