Equazione di Helmholtz

Equazione di Helmholtz in un rettangolo

Consideriamo il problema di Dirichlet per l'equazione di Helmholtz

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) + \lambda u(x,y) = 0 & (x,y) \in R \\ u(x,y) = 0 & (x,y) \in \partial R \end{cases} \tag{1}$$

con $R =]0,L[\times]0,M[$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Studiamo per quali valori di λ esistono soluzioni non identicamente nulle di questo problema.

Tali λ sono detti autovalori del problema (1).

Procediamo per separazione delle variabili, quindi cerchiamo una soluzione nella forma

$$u(x,y) = X(x)Y(y)\,,$$

con X e Y funzioni di una variabile non identicamente nulle, definite rispettivamente in $[0,L]$ e in $[0,M]$.

Se u è in questa forma, il problema diventa

$$\begin{cases} X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) + \lambda X(x)Y(y) = 0 & (x,y) \in R \\ X(x)Y(0) = 0 & x \in [0,L] \\ X(x)Y(M) = 0 & x \in [0,L] \\ X(0)Y(y) = 0 & y \in [0,M] \\ X(L)Y(y) = 0 & y \in [0,M]\,. \end{cases}$$

Dividendo l'equazione differenziale per $X(x)Y(y)$, si ottiene

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \lambda = 0$$

e quindi

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda\,.$$

Il membro di sinistra di questa uguaglianza è funzione della sola x, mentre quello di destra è funzione della sola y, quindi entrambi sono costanti; perciò esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = k\,, \qquad -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda = k\,.$$

La prima di queste equazioni equivale a

$$X''(x) = kX(x)\,;$$

inoltre le condizioni sulla frontiera $X(0)Y(y) = 0$ e $X(L)Y(y) = 0$ sono soddisfatte se e solo se

$$X(0) = X(L) = 0\,,$$

visto che Y non è identicamente nulla.

L'equazione differenziale

$$X''(x) = kX(x)$$

è lineare a coefficienti costanti, con polinomio caratteristico $t^2 - k$, che si annulla per $t = 0$ se $k = 0$, per $t = \pm\sqrt{k}$ se $k > 0$ e per $t = \pm i\sqrt{-k}$ se $k < 0$.

Quindi l'integrale generale (reale) è

$$\begin{aligned} X(x) &= c_1 + c_2 x && \text{se } k = 0\,, \\ X(x) &= c_1 \operatorname{senh}\big(\sqrt{k}\,x\big) + c_2 \cosh\big(\sqrt{k}\,x\big) && \text{se } k > 0\,, \\ X(x) &= c_1 \operatorname{sen}\big(\sqrt{-k}\,x\big) + c_2 \cos\big(\sqrt{-k}\,x\big) && \text{se } k < 0\,. \end{aligned}$$

Nel caso $k = 0$ la condizione $X(0) = X(L) = 0$ equivale a

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 + c_2 L = 0\,; \end{cases}$$

quindi $c_1 = 0$ e, sostituendo nella seconda equazione, anche $c_2 = 0$. Perciò l'unica soluzione è quella identicamente nulla.

Nel caso $k > 0$ la condizione $X(0) = X(L) = 0$ equivale a

$$\begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 \operatorname{senh}\big(\sqrt{k}\,L\big) + c_2 \cosh\big(\sqrt{k}\,L\big) = 0\,; \end{cases}$$

quindi $c_2 = 0$ e dalla seconda equazione, visto che $\operatorname{senh}\big(\sqrt{k}\,L\big) \neq 0$, segue $c_1 = 0$. Perciò anche in questo caso l'unica soluzione è quella identicamente nulla.

Nel caso $k < 0$ la condizione $X(0) = X(L) = 0$ equivale a

$$\begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 \operatorname{sen}\big(\sqrt{-k}\,L\big) + c_2 \cos\big(\sqrt{-k}\,L\big) = 0\,; \end{cases}$$

quindi $c_2 = 0$. Se $\operatorname{sen}\big(\sqrt{-k}\,L\big) \neq 0$ allora dalla seconda equazione segue $c_1 = 0$ e l'unica soluzione è quella identicamente nulla.

Se invece $\operatorname{sen}\big(\sqrt{-k}\,L\big) = 0$ allora la seconda equazione è verificata qualunque sia c_1 e quindi la funzione $\operatorname{sen}\big(\sqrt{-k}\,x\big)$ e i suoi multipli scalari sono soluzione dell'equazione differenziale che si annullano in 0 e in L.

Si ha $\operatorname{sen}\big(\sqrt{-k}\,L\big) = 0$ se e solo se $\sqrt{-k}\,L$ è multiplo intero di π, cioè se e solo se esiste n intero tale che $\sqrt{-k}\,L = n\pi$; evidentemente un tale n è positivo.

Perciò esiste una soluzione non nulla per $k = -n^2\pi^2/L^2$ con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e in corrispondenza di tale k una soluzione è

$$X(x) = \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{L}\,x\Big)\,.$$

Per questo valore di k, la funzione Y è soluzione dell'equazione

$$-\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}\,,$$

cioè

$$Y''(y)+\Big(\lambda-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\Big)Y(y)=0\,,$$

con le condizioni

$$Y(0)=Y(M)=0\,.$$

Il problema è del tutto analogo a quello per la funzione X ; gli unici cambiamenti sono dovuti al fatto che abbiamo $n^2\pi^2/L^2-\lambda$ al posto di k e M al posto di L .

Abbiamo quindi soluzioni non identicamente nulle se solo se

$$\frac{n^2\pi^2}{L^2}-\lambda=-\frac{m^2\pi^2}{M^2}$$

con $m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ ed in tal caso una soluzione è

$$Y(y)=\operatorname{sen}\Big(\frac{m\pi}{M}y\Big)\,.$$

Perciò gli autovalori del problema (1) sono i λ che possono essere scritti nella forma

$$\lambda=\frac{n^2\pi^2}{L^2}+\frac{m^2\pi^2}{M^2}$$

con $n,m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. In corrispondenza di tali autovalori abbiamo le autofunzioni

$$u_{n,m}(x,y)=\operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)\operatorname{sen}\Big(\frac{m\pi}{M}y\Big)\,.$$

Lo stesso λ può corrispondere a coppie diverse di interi (n,m) ed in tal caso si hanno più autofunzioni linearmente indipendenti relative allo stesso autovalore, cioè vi sono autovalori di molteplicità geometrica maggiore di 1 . Ad esempio se $L=M$ le funzioni

$$u_{1,2}(x,y)=\operatorname{sen}\Big(\frac{\pi}{L}x\Big)\operatorname{sen}\Big(\frac{2\pi}{L}y\Big)\,,\qquad u_{2,1}(x,y)=\operatorname{sen}\Big(\frac{2\pi}{L}x\Big)\operatorname{sen}\Big(\frac{\pi}{L}y\Big)$$

sono entrambe autofunzioni relative all'autovalore $1^2\pi^2/L^2+2^2\pi^2/L^2$, cioè $5\pi^2/L^2$.

Si può dimostrare che gli autovalori hanno tutti molteplicità geometrica 1 se e solo se L^2/M^2 è irrazionale.

Le autofunzioni $u_{n,m}$ sono ortogonali tra loro nel senso di $L^2(R)$.

Infatti si ha

$$\begin{aligned}&\langle u_{n_1,m_1},u_{n_2,m_2}\rangle\\&\quad=\int_R \operatorname{sen}\Big(\frac{n_1\pi}{L}x\Big)\operatorname{sen}\Big(\frac{m_1\pi}{M}y\Big)\operatorname{sen}\Big(\frac{n_2\pi}{L}x\Big)\operatorname{sen}\Big(\frac{m_2\pi}{M}y\Big)\,dx\,dy\\&\qquad=\int_0^L \operatorname{sen}\Big(\frac{n_1\pi}{L}x\Big)\operatorname{sen}\Big(\frac{n_2\pi}{L}x\Big)\,dx\int_0^M \operatorname{sen}\Big(\frac{m_1\pi}{M}y\Big)\operatorname{sen}\Big(\frac{m_2\pi}{M}y\Big)\,dy\,.\end{aligned}$$

Visto che le funzioni $\operatorname{sen}\Big(\dfrac{n\pi}{L}x\Big)$ (con $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$) sono ortogonali tra loro in $L^2([0,L])$ e le funzioni $\operatorname{sen}\Big(\dfrac{m\pi}{M}y\Big)$ sono ortogonali tra loro in $L^2([0,M])$, se $n_1\neq n_2$ allora l'integrale rispetto alla variabile x si annulla, mentre se $m_1 \neq m_2$ allora si annulla l'integrale rispetto alla variabile y. Perciò se $(n_1, m_1) \neq (n_2, m_2)$ almeno uno dei due integrali semplici si annulla, quindi il prodotto scalare è nullo.

Si può dimostrare che queste funzioni costituiscono un sistema ortogonale completo per $L^2(R)$, quindi ogni funzione appartenente a $L^2(R)$ può essere sviluppata in serie di funzioni $u_{n,m}$.

Consideriamo ora il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) + \lambda u(x,y) = 0 & (x,y) \in R \\ u(0,y) = 0 & y \in [0,M] \\ u(L,y) = 0 & y \in [0,M] \\ u(x,0) = f(x) & x \in [0,L] \\ u(x,M) = 0 & x \in [0,L] \end{cases} \tag{2}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$ che non sia un autovalore del corrispondente problema con dati al bordo omogenei, cioè con $f = 0$.

Procedendo per separazione delle variabili come sopra, si cercano le soluzioni dell'equazione di Helmholtz nella forma $X(x)Y(y)$ e si trova che esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = k\,, \qquad -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda = k\,.$$

Deve essere $X(0) = X(L) = 0$, quindi si ha

$$X(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

A seconda del valore di λ avremo

$$\begin{aligned} &Y(y) = c_1 + c_2 y && \text{se } \lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}\,, \\ &Y(y) = c_1 \operatorname{senh}\left(\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2} - \lambda}\, y\right) + c_2 \cosh\left(\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2} - \lambda}\, y\right) && \text{se } \lambda < \frac{n^2\pi^2}{L^2}\,, \\ &Y(y) = c_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda - \frac{n^2\pi^2}{L^2}}\, y\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\lambda - \frac{n^2\pi^2}{L^2}}\, y\right) && \text{se } \lambda > \frac{n^2\pi^2}{L^2}\,. \end{aligned}$$

Scegliamo ora c_1 e c_2 in modo che sia $Y(M) = 0$, condizione che segue da $u(x,M) = 0$. Se $\lambda = n^2\pi^2/L^2$ deve essere $c_1 + c_2 M = 0$ e quindi $c_1 = -c_2 M$, perciò una soluzione è

$$Y(y) = M - y\,.$$

Se $\lambda < n^2\pi^2/L^2$, ponendo $\alpha = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2} - \lambda}$, deve essere

$$c_1 \operatorname{senh}(\alpha M) + c_2 \cosh(\alpha M) = 0\,,$$

da cui segue

$$c_1 = -\frac{\cosh(\alpha M)}{\operatorname{senh}(\alpha M)}\, c_2\,;$$

quindi possiamo scegliere $c_1 = -\cosh(\alpha M)$ e $c_2 = \operatorname{senh}(\alpha M)$ e una soluzione è

$$Y(y) = -\operatorname{senh}(\alpha y)\cosh(\alpha M) + \cosh(\alpha y)\operatorname{senh}(\alpha M) = \operatorname{senh}\big(\alpha(M-y)\big)$$

Se $\lambda > n^2\pi^2/L^2$, ponendo $\beta = \sqrt{\lambda - \frac{n^2\pi^2}{L^2}}$, deve essere

$$c_1 \operatorname{sen}(\beta M) + c_2 \cos(\beta M) = 0\,,$$

abbiamo supposto che λ non sia un autovalore e quindi è $\operatorname{sen}(\beta M) \neq 0$, perciò otteniamo

$$c_1 = -\frac{\cos(\beta M)}{\operatorname{sen}(\beta M)}\, c_2\,;$$

quindi possiamo scegliere $c_1 = -\cos(\beta M)$ e $c_2 = \operatorname{sen}(\beta M)$ e una soluzione è

$$Y(y) = -\operatorname{sen}(\beta y)\cos(\beta M) + \cos(\beta y)\operatorname{sen}(\beta M) = \operatorname{sen}\big(\beta(M-y)\big)\,.$$

Perciò se poniamo

$$Y_n(y) = \begin{cases} M - y & \text{se } \lambda = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}\,, \\ \operatorname{senh}\left(\sqrt{\dfrac{n^2\pi^2}{L^2} - \lambda}\,(M-y)\right) & \text{se } \lambda < \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}\,, \\ \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda - \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}}\,(M-y)\right) & \text{se } \lambda > \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}\,. \end{cases}$$

la funzione

$$u_n(x,y) = \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)Y_n(y)$$

verifica il problema (2) tranne la condizione $u(x,0) = f(x)$. Cercheremo quindi dei coefficienti b_n in modo che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)Y_n(y)$$

sia convergente e la somma verifichi la condizione $u(x,0) = f(x)$.

Ciò richiede che si abbia

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)Y_n(0) = f(x)$$

e quindi i b_n andranno scelti in modo che $b_n Y_n(0)$ siano i coefficienti dello sviluppo in serie di seni della funzione f. Perciò dovrà essere

$$b_n = \frac{2}{Y_n(0)L}\int_0^L \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)f(x)\,dx\,.$$

Equazione di Helmholtz in un cerchio

Cerchiamo gli autovalori del problema di Dirichlet per l'equazione di Helmholtz

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) + \lambda u(x,y) = 0 & (x,y) \in S(0,L) \\ u(x,y) = 0 & (x,y) \in \partial S(0,L) \end{cases} \tag{3}$$

dove $S(0,L)$ è il cerchio di centro l'origine e raggio L.

Dimostriamo anzitutto che ogni autovalore è positivo.

Data una funzione u di classe C^2 nel cerchio, applicando il teorema della divergenza al campo vettoriale $u \operatorname{grad} u$, cioè alla funzione

$$(x,y) \mapsto \big(u_x(x,y)u(x,y), u_y(x,y)u(x,y)\big) ,$$

si ottiene

$$\int_{S(0,L)} \operatorname{div}(u \operatorname{grad} u)(x,y)\, dx\, dy = \int_{\partial S(0,L)} \langle u \operatorname{grad} u, \nu \rangle\, ds$$

dove ν è il vettore normale esterno a $\partial S(0,L)$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u \operatorname{grad} u) &= (u u_x)_x + (u u_y)_y \\ &= u u_{xx} + u_x u_x + u u_{yy} + u_y u_y = u\Delta u + u_x^2 + u_y^2 , \end{aligned}$$

inoltre

$$\langle u \operatorname{grad} u, \nu \rangle = u \langle \operatorname{grad} u, \nu \rangle = u \frac{\partial u}{\partial \nu} .$$

Perciò

$$\int_{S(0,L)} \big(u(x,y)\Delta u(x,y) + u_x^2(x,y) + u_y^2(x,y)\big)\, dx\, dy = \int_{\partial S(0,L)} u \frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds .$$

Se u è soluzione del problema (3), allora $\lambda u = -\Delta u$ e u è nulla sulla frontiera del cerchio, quindi l'uguaglianza precedente diventa

$$\int_{S(0,L)} \big(-\lambda u^2(x,y) + u_x^2(x,y) + u_y^2(x,y)\big)\, dx\, dy = 0 ,$$

cioè

$$\lambda \int_{S(0,L)} u^2(x,y)\, dx\, dy = \int_{S(0,L)} \big(u_x^2(x,y) + u_y^2(x,y)\big)\, dx\, dy .$$

La funzione u non è identicamente nulla, quindi

$$\int_{S(0,L)} u^2(x,y)\, dx\, dy > 0 .$$

Perciò dalla uguaglianza scritta sopra possiamo ricavare λ, ottenendo

$$\lambda = \frac{\int\limits_{S(0,L)} \left(u_x^2(x,y) + u_y^2(x,y)\right) dx\,dy}{\int\limits_{S(0,L)} u^2(x,y)\,dx\,dy}$$

Le funzioni u_x e u_y non sono entrambe identicamente nulle; infatti in caso contrario u sarebbe costante e quindi, essendo nulla sulla frontiera, essa sarebbe identicamente nulla; perciò

$$\int\limits_{S(0,L)} \left(u_x^2(x,y) + u_y^2(x,y)\right) dx\,dy > 0\,.$$

Quindi λ è quoziente di due numeri positivi, dunque è positivo.

Passando in coordinate polari l'equazione di Helmholtz diventa

$$v_{\rho\rho}(\rho,\theta) + \frac{1}{\rho} v_\rho(\rho,\theta) + \frac{1}{\rho^2} v_{\theta\theta}(\rho,\theta) + \lambda v(\rho,\theta) = 0 \qquad 0<\rho<L, \quad 0\le\theta\le 2\pi\,,$$

mentre la condizione sulla frontiera diventa

$$v(L,\theta) = 0 \qquad 0\le\theta\le 2\pi\,.$$

Inoltre, il fatto che v si ottenga esprimendo in coordinate polari una funzione che, in coordinate cartesiane, è di classe C^2, implica che debba essere

$$\begin{aligned} v(\rho,0) &= v(\rho,2\pi) \qquad 0<\rho<L \\ v_\theta(\rho,0) &= v_\theta(\rho,2\pi) \qquad 0<\rho<L \end{aligned}$$

e che esista $v(0,\theta)$, indipendente da θ.

Queste condizioni sono verificate se v è ottenuto scrivendo in coordinate polari una funzione di clase C^2 in coordinate cartesiane. Invece in generale non è sufficiente che queste condizioni siano verificate per poter trasformare v in coordinate cartesiane; però si verifica direttamente che tutte le soluzioni che troveremo possono essere riscritte in coordinate cartesiane ottenendo funzioni di classe C^2.

Perciò studiamo il problema

$$\begin{cases} v_{\rho\rho}(\rho,\theta) + \frac{1}{\rho} v_\rho(\rho,\theta) + \frac{1}{\rho^2} v_{\theta\theta}(\rho,\theta) + \lambda v(\rho,\theta) = 0 & 0<\rho<L,\, 0\le\theta\le 2\pi \\ v(\rho,0) = v(\rho,2\pi) & 0<\rho<L \\ v_\theta(\rho,0) = v_\theta(\rho,2\pi) & 0<\rho<L \\ v(L,\theta) = 0 & 0\le\theta\le 2\pi \\ v(0,\theta) \text{ indipendente da } \theta & \end{cases}$$

Procediamo per separazione di variabili, cercando una soluzione nella forma

$$v(\rho,\theta) = R(\rho)\Theta(\theta)\,.$$

L'equazione diventa

$$R''(\rho)\Theta(\theta)+\frac{1}{\rho}R'(\rho)\Theta(\theta)+\frac{1}{\rho^2}R(\rho)\Theta''(\theta)+\lambda R(\rho)\Theta(\theta)=0$$

da cui, dividendo per $R(\rho)\Theta(\theta)$ e moltiplicando per ρ^2, segue

$$\rho^2\frac{R''(\rho)}{R(\rho)}+\rho\frac{R'(\rho)}{R(\rho)}+\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}+\lambda\rho^2=0$$

e quindi

$$\rho^2\frac{R''(\rho)}{R(\rho)}+\rho\frac{R'(\rho)}{R(\rho)}+\lambda\rho^2=-\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}\,.$$

Il membro di sinistra di questa uguaglianza dipende solo da ρ, mentre quello di destra dipende solo da θ, quindi entrambi debbono essere costanti, perciò esiste $k\in\mathbb{R}$ tale che

$$\rho^2\frac{R''(\rho)}{R(\rho)}+\rho\frac{R'(\rho)}{R(\rho)}+\lambda\rho^2=-\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}=k\,.$$

Risolviamo anzitutto l'equazione

$$-\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}=k\,,$$

che equivale a

$$\Theta''(\theta)+k\Theta(\theta)=0\,.$$

Inoltre deve essere

$$\Theta(0)=\Theta(2\pi)\qquad \Theta'(0)=\Theta'(2\pi)\,,$$

cioè Θ deve verificare le cosiddette condizioni periodiche nell'intervallo $[0,2\pi]$.

L'equazione differenziale $\Theta''(\theta)+k\Theta(\theta)$ è lineare a coefficienti costanti, con polinomio caratteristico t^2+k, che si annulla per $t=0$ se $k=0$, per $t=\pm\sqrt{-k}$ se $k<0$ e per $t=\pm i\sqrt{k}$ se $k>0$.

Quindi l'integrale generale (reale) è

$$\begin{aligned}
&\Theta(\theta)=c_1+c_2\theta && \text{se } k=0\,,\\
&\Theta(\theta)=c_1\operatorname{senh}\big(\sqrt{-k}\,\theta\big)+c_2\cosh\big(\sqrt{-k}\,\theta\big) && \text{se } k<0\,,\\
&\Theta(\theta)=c_1\operatorname{sen}\big(\sqrt{k}\,\theta\big)+c_2\cos\big(\sqrt{k}\,\theta\big) && \text{se } k>0\,.
\end{aligned}$$

Nel caso $k=0$ le condizioni su Θ equivalgono a

$$\begin{cases} c_1=c_1+c_2 2\pi\\ c_2=c_2\,;\end{cases}$$

perciò $c_2=0$, mentre c_1 può essere qualsiasi. Quindi una soluzione è $\Theta(\theta)=1$.

Nel caso $k < 0$ le condizioni su Θ equivalgono a

$$\begin{cases} c_2 = c_1 \operatorname{senh}(\sqrt{-k}\,2\pi) + c_2 \cosh(\sqrt{-k}\,2\pi) \\ c_1\sqrt{-k} = c_1\sqrt{-k}\,\cosh(\sqrt{-k}\,2\pi) + c_2\sqrt{-k}\,\operatorname{senh}(\sqrt{-k}\,2\pi)\,; \end{cases}$$

cioè, eliminando il fattore $\sqrt{-k}$ nella seconda equazione,

$$\begin{cases} c_1 \operatorname{senh}(\sqrt{-k}\,2\pi) + c_2\big(\cosh(\sqrt{-k}\,2\pi) - 1\big) = 0 \\ c_1\big(\cosh(\sqrt{-k}\,2\pi) - 1\big) + c_2 \operatorname{senh}(\sqrt{-k}\,2\pi) = 0\,. \end{cases}$$

Il determinante della matrice dei coefficienti di questo sistema è

$$\begin{aligned} &\operatorname{senh}^2(\sqrt{-k}\,2\pi) - \big(\cosh(\sqrt{-k}\,2\pi) - 1\big)^2 \\ &\qquad = \operatorname{senh}^2(\sqrt{-k}\,2\pi) - \cosh^2(\sqrt{-k}\,2\pi) + 2\cosh(\sqrt{-k}\,2\pi) - 1 \\ &\qquad\qquad = 2\cosh(\sqrt{-k}\,2\pi) - 2\,, \end{aligned}$$

che è diverso da 0; perciò l'unica soluzione è $c_1 = c_2 = 0$ e quindi Θ deve essere identicamente nulla.

Nel caso $k > 0$ le condizioni su Θ equivalgono a

$$\begin{cases} c_2 = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{k}\,2\pi) + c_2 \cos(\sqrt{k}\,2\pi) \\ c_1\sqrt{k} = c_1\sqrt{k}\,\cos(\sqrt{k}\,2\pi) - c_2\sqrt{k}\,\operatorname{sen}(\sqrt{k}\,2\pi)\,; \end{cases}$$

cioè, eliminando il fattore $\sqrt{k}$ nella seconda equazione,

$$\begin{cases} c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{k}\,2\pi) + c_2\big(\cos(\sqrt{k}\,2\pi) - 1\big) = 0 \\ c_1\big(\cos(\sqrt{k}\,2\pi) - 1\big) - c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{k}\,2\pi) = 0\,. \end{cases}$$

Il determinante della matrice dei coefficienti di questo sistema è

$$\begin{aligned} &-\operatorname{sen}^2(\sqrt{k}\,2\pi) - \big(\cos(\sqrt{k}\,2\pi) - 1\big)^2 \\ &\qquad = -\operatorname{sen}^2(\sqrt{k}\,2\pi) - \cos^2(\sqrt{k}\,2\pi) + 2\cos(\sqrt{k}\,2\pi) - 1 \\ &\qquad\qquad = 2\cos(\sqrt{k}\,2\pi) - 2\,, \end{aligned}$$

che è uguale a 0 se solo se $\cos(\sqrt{k}\,2\pi) = 1$, cioè se e solo se $\sqrt{k}$ è intero. Perciò se $\sqrt{k}$ non è intero il sistema ha solo la soluzione $c_1 = c_2 = 0$ e quindi Θ deve essere identicamente nulla. Se invece $k = n^2$, con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, allora tutti i coefficienti del sistema si annullano, quindi si hanno le soluzioni

$$\Theta(\theta) = c_1 \operatorname{sen}(n\theta) + c_2 \cos(n\theta)\,.$$

Perciò affinché esista una Θ non identicamente nulla che soddisfa l'equazione e le condizioni di periodicità deve essere $k = n^2$, con $n \in \mathbb{N}$ e si ha

$$\Theta(\theta) = c_1 \operatorname{sen}(n\theta) + c_2 \cos(n\theta)\,,$$

nel caso $n = 0$ il primo addendo è nullo.

Resta da risolvere l'equazione

$$\rho^2 \frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \rho \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} + \lambda\rho^2 = n^2 ,$$

cioè

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + \left(\lambda\rho^2 - n^2\right) R(\rho) = 0 . \tag{4}$$

Se $\lambda = 1$ questa è un'equazione di Bessel, nel caso generale possiamo ricondurci a un'equazione di Bessel con un cambiamento di variabili, ricordando che abbiamo già dimostrato che $\lambda > 0$.

Supponiamo che R verifichi l'equazione (4). Fissato $a \in \mathbb{R}^+$, consideriamo la funzione $\overline{R}$ tale che

$$\overline{R}(\rho) = R(a\rho) .$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \overline{R}'(\rho) &= aR'(a\rho) \\ \overline{R}''(\rho) &= a^2 R''(a\rho) \end{aligned}$$

e quindi, visto che vale (4),

$$\rho^2 \overline{R}''(\rho) = -a\rho R'(a\rho) - (\lambda a^2 \rho^2 - n^2) R(a\rho) = -\rho \overline{R}'(\rho) - (\lambda a^2 \rho^2 - n^2) \overline{R}(\rho) ;$$

se scegliamo $a = 1/\sqrt{\lambda}$ allora $\overline{R}$ è soluzione dell'equazione di Bessel di ordine n

$$\rho^2 \overline{R}''(\rho) + \rho \overline{R}'(\rho) + (\rho^2 - n^2) \overline{R}(\rho) = 0 .$$

Le soluzioni dell'equazione di Bessel di ordine n sono combinazione lineare delle funzioni di Bessel di ordine n, quindi

$$\overline{R}(\rho) = c_1 J_n(\rho) + c_2 Y_n(\rho) ,$$

da cui segue

$$R(\rho) = c_1 J_n\left(\sqrt{\lambda}\rho\right) + c_2 Y_n\left(\sqrt{\lambda}\rho\right) .$$

La funzione R deve essere definita anche in 0, in caso contrario la soluzione v di (3) non sarebbe definita nell'origine. Le funzioni di Bessel di seconda specie Y_n sono singolari in 0, quindi deve essere $c_2 = 0$; perciò le soluzioni sono i multipli scalari di

$$R(\rho) = J_n\left(\sqrt{\lambda}\rho\right) .$$

Inoltre dalla condizione $v(L, \theta) = 0$ segue $R(L) = 0$, quindi λ deve essere tale che $J_n\left(\sqrt{\lambda}L\right) = 0$; cioè, indicati con $\xi_{n,1}, \xi_{n,2}, \ldots$ gli zeri positivi della funzione J_n, deve essere

$$\lambda = \frac{\xi_{n,j}^2}{L^2} .$$

Perciò il problema (3) ha gli autovalori $\xi_{n,j}^2/L^2$, le corrispondenti autofunzioni sono

$$\begin{aligned} &v_{0,j}(\rho,\theta)=J_0\Big(\frac{\xi_{0,j}}{L}\rho\Big) && j=1,2,\dots \\ &\left.\begin{aligned} &v_{n,j,1}(\rho,\theta)=J_n\Big(\frac{\xi_{n,j}}{L}\rho\Big)\cos(n\theta) \\ &v_{n,j,2}(\rho,\theta)=J_n\Big(\frac{\xi_{n,j}}{L}\rho\Big)\operatorname{sen}(n\theta) \end{aligned}\right\} && n=1,2,\dots \quad j=1,2,\dots \end{aligned}$$

Possiamo quindi concludere che gli autovalori $\xi_{0,j}^2/L^2$ hanno molteplicità geometrica 1, mentre se $n>0$ gli autovalori $\xi_{n,j}^2/L^2$ hanno molteplicità geometrica 2.

Le autofunzioni elencate sopra sono tutte ortogonali tra loro.

Infatti se $n\neq m$ ed entrambi sono non nulli si ha

$$\begin{aligned} \langle v_{n,j,1},v_{m,k,1}\rangle &= \int_{[0,L]\times[0,2\pi]} \rho J_n\Big(\frac{\xi_{n,j}}{L}\rho\Big)\cos(n\theta)J_m\Big(\frac{\xi_{m,k}}{L}\rho\Big)\cos(m\theta)\,d\rho\,d\theta \\ &=\int_0^L \rho J_n\Big(\frac{\xi_{n,j}}{L}\rho\Big)J_m\Big(\frac{\xi_{m,k}}{L}\rho\Big)\,d\rho\int_0^{2\pi}\cos(n\theta)\cos(m\theta)\,d\theta \\ &=0, \end{aligned}$$

perché

$$\int_0^{2\pi}\cos(n\theta)\cos(m\theta)\,d\theta=0.$$

In modo analogo si può dimostrare che si ha anche $\langle v_{n,j,1},v_{m,k,2}\rangle=0$, $\langle v_{n,j,2},v_{m,k,2}\rangle=0$, $\langle v_{n,j,1},v_{0,k}\rangle=0$, $\langle v_{n,j,2},v_{0,k}\rangle=0$ e $\langle v_{n,j,1},v_{n,k,2}\rangle=0$.

Se $j\neq k$ allora

$$\begin{aligned} \langle v_{n,j,1},v_{n,k,1}\rangle &= \int_{[0,L]\times[0,2\pi]} \rho J_n\Big(\frac{\xi_{n,j}}{L}\rho\Big)\cos(n\theta)J_n\Big(\frac{\xi_{n,k}}{L}\rho\Big)\cos(n\theta)\,d\rho\,d\theta \\ &=\int_0^L \rho J_n\Big(\frac{\xi_{n,j}}{L}\rho\Big)J_n\Big(\frac{\xi_{n,k}}{L}\rho\Big)\,d\rho\int_0^{2\pi}\cos^2(n\theta)\,d\theta \\ &=0 \end{aligned}$$

perché

$$\int_0^L \rho J_n\Big(\frac{\xi_{n,j}}{L}\rho\Big)J_n\Big(\frac{\xi_{n,k}}{L}\rho\Big)\,d\rho=0.$$

Analogamente $\langle v_{n,j,2},v_{n,k,2}\rangle=0$ e $\langle v_{0,j},v_{0,k}\rangle=0$.

Si può dimostrare che il sistema delle autofunzioni è completo.

Nel caso che $\lambda > 0$ non sia autovalore per il problema (3), consideriamo il problema con dati al contorno non omogenei:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) + \lambda u(x,y) = 0 & (x,y) \in S(0,L) \\ u(x,y) = f(x,y) & (x,y) \in \partial S(0,L) \,. \end{cases} \tag{5}$$

Passando in coordinate polari il problema diventa

$$\begin{cases} v_{\rho\rho}(\rho,\theta) + \dfrac{1}{\rho} v_\rho(\rho,\theta) + \dfrac{1}{\rho^2} v_{\theta\theta}(\rho,\theta) + \lambda v(\rho,\theta) = 0 & 0 < \rho < L, 0 \le \theta \le 2\pi \\ v(\rho,0) = v(\rho,2\pi) & 0 < \rho < L \\ v_\theta(\rho,0) = v_\theta(\rho,2\pi) & 0 < \rho < L \\ v(L,\theta) = g(\theta) & 0 \le \theta \le 2\pi \\ v(0,\theta) \text{ indipendente da } \theta \end{cases}$$

dove $g(\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)$.

Procedendo come sopra, separando le variabili si ottengono le soluzioni dell'equazione di Helmholtz

$$v_0(\rho,\theta) = J_0(\sqrt{\lambda}\rho)$$

$$\left.\begin{aligned} v_{n,1}(\rho,\theta) &= J_n(\sqrt{\lambda}\rho)\cos(n\theta) \\ v_{n,2}(\rho,\theta) &= J_n(\sqrt{\lambda}\rho)\,\mathrm{sen}(n\theta) \end{aligned}\right\} \qquad n = 1,2,\dots$$

quindi cerchiamo una funzione che verifichi la condizione al bordo nella forma

$$v(\rho,\theta) = a_0 J_0(\sqrt{\lambda}\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\sqrt{\lambda}\rho)\left(a_n\cos(n\theta) + b_n\,\mathrm{sen}(n\theta)\right) .$$

La condizione $v(L,\theta) = g(\theta)$ è verificata se

$$g(\theta) = a_0 J_0(\sqrt{\lambda}L) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\sqrt{\lambda}L)\left(a_n\cos(n\theta) + b_n\,\mathrm{sen}(n\theta)\right) ,$$

quindi le costanti a_n e b_n si ricavano dai coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier di g.

Questo è possibile perchè abbiamo supposto che λ non sia autovalore del problema omogeneo, quindi $J_n(\sqrt{\lambda}L) \neq 0$.

Dovrà essere

$$a_0 = \frac{1}{2\pi J_0(\sqrt{\lambda}L)} \int_0^{2\pi} g(\varphi)\,d\varphi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi J_n(\sqrt{\lambda}L)} \int_0^{2\pi} \cos(n\varphi) g(\varphi)\,d\varphi$$

$$b_n = \frac{1}{\pi J_n(\sqrt{\lambda}L)} \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}(n\varphi) g(\varphi)\,d\varphi \,.$$

Perciò

$$v(\rho,\theta)=\frac{J_0(\sqrt{\lambda}\rho)}{2\pi J_0(\sqrt{\lambda}L)}\int_0^{2\pi}g(\varphi)\,d\varphi+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_n(\sqrt{\lambda}\rho)}{\pi J_n(\sqrt{\lambda}L)}\int_0^{2\pi}\big(\cos(n\theta)\cos(n\varphi)+\operatorname{sen}(n\theta)sen(n\varphi)\big)\,g(\varphi)\,d\varphi$$

$$=\frac{J_0(\sqrt{\lambda}\rho)}{2\pi J_0(\sqrt{\lambda}L)}\int_0^{2\pi}g(\varphi)\,d\varphi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_n(\sqrt{\lambda}\rho)}{\pi J_n(\sqrt{\lambda}L)}\int_0^{2\pi}\cos(n(\theta-\varphi))g(\varphi)\,d\varphi\,.$$

Se poniamo

$$P_\lambda(\rho,\theta)=\frac{J_0(\sqrt{\lambda}\rho)}{2\pi J_0(\sqrt{\lambda}L)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_n(\sqrt{\lambda}\rho)}{\pi J_n(\sqrt{\lambda}L)}\cos(n\theta)\,,$$

allora abbiamo

$$v(\rho,\theta)=\int_0^{2\pi}P_\lambda(\rho,\theta-\varphi)g(\varphi)\,d\varphi\,.$$

Consideriamo ora il problema di Neumann per l'equazione di Helmholtz

$$\begin{cases}\Delta u(x,y)+\lambda u(x,y)=0 & (x,y)\in S(0,L)\\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,y)=0 & (x,y)\in\partial S(0,L)\end{cases}\tag{6}$$

indicando con $\dfrac{\partial}{\partial\nu}$ la derivata normale a $\partial S(0,L)$, cioè nella direzione $(x/L,y/L)$.

Cerchiamo gli autovalori di questo problema, cioè i λ per cui esiste una soluzione non identicamente nulla del problema.

Procedendo come nel caso del problema di Dirichlet si prova anzitutto che gli autovalori sono non negativi.

In questo caso 0 è autovalore e le relative autofunzioni sono le funzioni costanti. Inoltre se $\overline{\xi}_{n,1},\overline{\xi}_{n,2},\dots$ sono gli zeri positivi della funzione J_n', gli autovalori sono

$$\lambda=\frac{\overline{\xi}_{n,j}^{\,2}}{L^2}$$

e le corrispondenti autofunzioni sono

$$v_{0,j}(\rho,\theta)=J_0\Big(\frac{\overline{\xi}_{0,j}}{L}\rho\Big)\qquad j=1,2,\dots$$

$$\left.\begin{aligned}v_{n,j,1}(\rho,\theta)&=J_n\Big(\frac{\overline{\xi}_{n,j}}{L}\rho\Big)\cos(n\theta)\\ v_{n,j,2}(\rho,\theta)&=J_n\Big(\frac{\overline{\xi}_{n,j}}{L}\rho\Big)\operatorname{sen}(n\theta)\end{aligned}\right\}\qquad n=1,2,\dots\quad j=1,2,\dots$$

Equazione di Helmholtz nel piano

Cerchiamo gli autovalori del seguente problema per l'equazione di Helmholtz

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) + \lambda u(x,y) = 0 & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ u \text{ limitata} \end{cases} \tag{7}$$

Utilizziamo il metodo di separazione delle variabili, sia in coordinate cartesiane che in coordinate polari.

In coordinate cartesiane, procedendo in modo analogo a quanto fatto per il problema nel rettangolo, dobbiamo trovare due funzioni X e Y limitate e non identicamente nulle, tali che

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = k \qquad\qquad -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda = k\,.$$

per un $k \in \mathbb{R}$.

L'equazione

$$X''(x) - kX(x) = 0$$

ha soluzioni limitate se e solo se $k \le 0$, in particolare se $k = 0$ si ha la soluzione $X(x) = 1$, mentre se $k < 0$ si hanno le due soluzioni linearmente indipendenti $X(x) = \cos(\sqrt{-k}\,x)$ e $X(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{-k}\,x)$.

Quando $k < 0$ possiamo scrivere le combinazioni lineari di queste funzioni come

$$\begin{aligned} &c_1 \cos(\sqrt{-k}\,x) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{-k}\,x) \\ &\qquad = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} \cos(\sqrt{-k}\,x) + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} \operatorname{sen}(\sqrt{-k}\,x) \right). \end{aligned}$$

Due numeri tali che la somma dei loro quadrati vale 1 possono sempre essere scritti come coseno e seno di uno stesso numero, perciò esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} = \cos(\sqrt{-k}\,x_0) \qquad \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} = \operatorname{sen}(\sqrt{-k}\,x_0)\,,$$

quindi

$$\begin{aligned} &c_1 \cos(\sqrt{-k}\,x) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{-k}\,x) \\ &\quad = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\left(\cos(\sqrt{-k}\,x_0)\cos(\sqrt{-k}\,x) + \operatorname{sen}(\sqrt{-k}\,x_0)\operatorname{sen}(\sqrt{-k}\,x) \right) \\ &\qquad\qquad = \sqrt{c_1^2+c_2^2}\cos(\sqrt{-k}\,(x - x_0))\,; \end{aligned}$$

cioè ogni combinazione lineare può essere scritta nella forma

$$X(x) = c\cos(\sqrt{-k}\,(x - x_0))\,.$$

Ciò vale anche se $k = 0$.

L'equazione
$$Y''(y)+(\lambda+k)Y(y)=0$$
è del tutto analoga a quella relativa alla funzione X , con $-\lambda-k$ al posto di k . Perciò questa equazione ha soluzioni limitate se e solo se $\lambda+k\geq 0$, cioè $\lambda\geq -k$. Anche in questo caso le soluzioni possono essere scritte nella forma $c\cos\big(\sqrt{\lambda+k}\,(y-y_0)\big)$ con $c,y_0\in\mathbb{R}$.

Possiamo concludere che ogni λ non negativo è autovalore; le autofunzioni sono
$$c\cos\big(\sqrt{-k}(x-x_0)\big)\cos\big(\sqrt{\lambda+k}(y-y_0)\big)$$
qualunque siano $x_0,y_0\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $k\in[-\lambda,0]$. Queste funzioni possono anche essere scritte nella forma
$$c\cos\big(\alpha(x-x_0)\big)\cos\big(\beta(y-y_0)\big)$$
con $\alpha,\beta\geq 0$ tali che $\alpha^2+\beta^2=\lambda$.

Osserviamo che in questo caso abbiamo infiniti autovalori per ciascuno dei quali (con l'esclusione di $\lambda=0$) vi sono infinite autofunzioni linearmente indipendenti.

Ponendosi in ambito complesso, invece di $\cos\big(\sqrt{-k}\,x\big)$ e $\operatorname{sen}\big(\sqrt{-k}\,x\big)$ dovremo considerare le funzioni $e^{i\sqrt{-k}\,x}$ e $e^{-i\sqrt{-k}\,x}$; mentre al posto di $\cos\big(\sqrt{\lambda+k}\,y\big)$ e $\operatorname{sen}\big(\sqrt{\lambda+k}\,y\big)$ dovremo considerare le funzioni $e^{i\sqrt{\lambda+k}\,y}$ e $e^{-i\sqrt{\lambda+k}\,y}$.

In questo modo otteniamo le autofunzioni
$$e^{i(\alpha x+\beta y)},$$
con $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tali che $\alpha^2+\beta^2=\lambda$.

Consideriamo ora l'equazione in coordinate polari, limitandoci al caso $\lambda>0$.

Procedendo per separazione di variabili dobbiamo trovare due funzioni R e Θ tali che
$$\rho^2\frac{R''(\rho)}{R(\rho)}+\rho\frac{R'(\rho)}{R(\rho)}+\lambda\rho^2=-\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}=k\,,$$
per un $k\in\mathbb{R}$. Come nel caso del cerchio, la funzione Θ deve soddisfare le condizioni periodiche, quindi deve essere $k=n^2$ con $n\in\mathbb{N}$ e
$$\Theta(\theta)=c_1\cos(n\theta)+c_2\operatorname{sen}(n\theta)\,.$$

La funzione R deve soddisfare l'equazione
$$R''(\rho)+\frac{1}{\rho}R'(\rho)+\left(\lambda-\frac{n^2}{\rho^2}\right)R(\rho)=0$$
e deve avere limite reale per ρ che tende a 0 , quindi, ripetendo quanto già visto,
$$R(\rho)=cJ_n\big(\sqrt{\lambda}\rho\big)\,.$$

Perciò ogni $\lambda\in\mathbb{R}^+$ è autovalore a cui corrispondono le autofunzioni
$$v(\rho,\theta)=J_n\big(\sqrt{\lambda}\rho\big)\big(c_1\cos(n\theta)+c_2\operatorname{sen}(n\theta)\big)\,,$$
con $n\in\mathbb{N}$.

Le funzioni di Bessel hanno limite 0 all'infinito, quindi queste autofunzioni hanno limite 0 per ρ che tende a ∞, cioè sono autofunzioni del seguente problema più restrittivo di (7)

$$\begin{cases} \Delta u(x,y)+\lambda u(x,y)=0 & (x,y)\in\mathbb{R}^2 \\ \lim\limits_{\|(x,y)\|\to\infty} u(x,y)=0 \end{cases}$$

In ambito complesso, si hanno le autofunzioni

$$cJ_n(\sqrt{\lambda}\rho)e^{in\theta},$$

con $n\in\mathbb{Z}$ (ricordando che se n è intero positivo allora $J_{-n}=(-1)^n J_n$).

Vediamo un collegamento tra le autofunzioni trovate per separazione di variabili esprimendo la funzione incognita in coordinate cartesiane e quelle trovate esprimendo la funzione incognita in coordinate polari.

In coordinate polari l'autofunzione $e^{i(\alpha x+\beta y)}$ diventa $e^{i\rho(\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta)}$. Abbiamo

$$\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\Big(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cos\theta+\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sin\theta\Big),$$

quindi se poniamo $\lambda=\alpha^2+\beta^2$ e scegliamo θ_0 tale che $\operatorname{sen}\theta_0=\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ e $\cos\theta_0=\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, si ha

$$\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta=\sqrt{\lambda}(\operatorname{sen}\theta_0\cos\theta+\cos\theta_0\sin\theta)=\sqrt{\lambda}\operatorname{sen}(\theta+\theta_0),$$

quindi l'autofunzione è

$$e^{i\sqrt{\lambda}\rho\operatorname{sen}(\theta+\theta_0)}.$$

Ricordando la formula

$$e^{ix\operatorname{sen}\theta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)e^{in\theta}$$

si ha

$$e^{i\rho\sqrt{\lambda}\operatorname{sen}(\theta+\theta_0)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(\sqrt{\lambda}\rho)e^{in(\theta+\theta_0)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\theta_0}J_n(\sqrt{\lambda}\rho)e^{in\theta}$$

e quindi le autofunzioni ottenute per separazione di variabili in coordinate cartesiane si ottengono mediante una serie i cui addendi sono le autofunzioni trovate in coordinate polari.

Equazione di Helmholtz nell'esterno di un cerchio

Cerchiamo gli autovalori del problema di Dirichlet per l'equazione di Helmholtz

$$\begin{cases} \Delta u(x,y)+\lambda u(x,y)=0 & (x,y)\notin\overline{S(0,L)} \\ u(x,y)=0 & (x,y)\in\partial S(0,L) \\ \lim\limits_{\|(x,y)\|\to\infty} u(x,y)=0 \end{cases} \tag{8}$$

dove $S(0,L)$ è il cerchio di centro l'origine e raggio L.

Procedendo per separazione di variabili in coordinate polari, dobbiamo trovare due funzioni R e Θ tali che

$$\rho^2\frac{R''(\rho)}{R(\rho)}+\rho\frac{R'(\rho)}{R(\rho)}+\lambda\rho^2=-\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}=k\,,$$

per un $k\in\mathbb{R}$.

Procedendo come nel caso del cerchio, viste le condizioni a cui deve soddisfare Θ, deve essere deve essere $k=n^2$ con $n\in\mathbb{N}$ e

$$\Theta(\theta)=c_1\cos(n\theta)+c_2\operatorname{sen}(n\theta)\,.$$

La funzione R deve soddisfare l'equazione

$$R''(\rho)+\frac{1}{\rho}R'(\rho)+\left(\lambda-\frac{n^2}{\rho^2}\right)R(\rho)=0\,,$$

con le condizioni

$$\begin{cases} R(L)=0 \\ \lim\limits_{\rho\to\infty}R(\rho)=0\,. \end{cases}$$

Questa è un'equazione di Bessel se $\lambda=1$ e, come già visto, se $\lambda>0$ ci si può ricondurre a un'equazione di Bessel con un cambiamento di variabili; perciò l'integrale generale dell'equazione è

$$R(\rho)=d_1J_n(\sqrt{\lambda}\rho)+d_2Y_n(\sqrt{\lambda}\rho)\,.$$

Ognuna di queste funzioni verifica la condizione all'infinito, perché le funzioni di Bessel hanno limite 0 all'infinito.

Inoltre deve essere soddisfatta la condizione sulla frontiera del cerchio, quindi deve essere

$$d_1J_n(\sqrt{\lambda}L)+d_2Y_n(\sqrt{\lambda}L)=0\,.$$

Le funzioni di Bessel di prima e seconda specie non hanno zeri in comune, quindi almeno uno dei coefficienti è non nullo, perciò l'equazione ha infinite soluzioni che formano uno spazio vettoriale di dimensione 1. Possiamo scegliere

$$\begin{aligned} d_1&=Y_n(\sqrt{\lambda}L)\\ d_2&=-J_n(\sqrt{\lambda}L)\,. \end{aligned}$$

Perciò qualunque $\lambda>0$ è autovalore per (8) a cui corrispondono le infinite autofunzioni linearmente indipendenti

$$\Big(Y_n(\sqrt{\lambda}L)J_n(\sqrt{\lambda}\rho)-J_n(\sqrt{\lambda}L)\,Y_n(\sqrt{\lambda}\rho)\Big)\cos(n\theta)$$
$$\Big(Y_n(\sqrt{\lambda}L)J_n(\sqrt{\lambda}\rho)-J_n(\sqrt{\lambda}L)\,Y_n(\sqrt{\lambda}\rho)\Big)\operatorname{sen}(n\theta)$$

con $n\in\mathbb{N}$ (ovviamente per $n=0$ non va considerata la soluzione con $\operatorname{sen}(n\theta)$).

Il problema dato ammette quindi sempre infinite soluzioni; è possibile individuarne una aggiungendo una condizione sul comportamento della soluzione all'infinito. Per esprimere questa condizione è necessario studiare il problema in ambito complesso.

Introducendo le funzioni di Hankel $H_n^{(1)}$ e $H_n^{(2)}$, definite da

$$H_n^{(1)}(t)=J_n(t)+iY_n(t) \qquad H_n^{(2)}(t)=J_n(t)-iY_n(t)$$

le soluzioni del problema

$$\begin{cases} \Delta u(x,y)+\lambda u(x,y)=0 & (x,y)\notin\overline{S(0,L)} \\ \lim\limits_{\|(x,y)\|\to\infty} u(x,y)=0 \end{cases}$$

che abbiamo trovato possono essere espresse come combinazione lineare di

$$H_n^{(1)}(\sqrt{\lambda}\rho)e^{in\theta} \qquad H_n^{(1)}(\sqrt{\lambda}\rho)e^{-in\theta} \qquad H_n^{(2)}(\sqrt{\lambda}\rho)e^{in\theta} \qquad H_n^{(2)}(\sqrt{\lambda}\rho)e^{-in\theta}$$

con $n\in\mathbb{N}$ o anche

$$H_{|n|}^{(1)}(\sqrt{\lambda}\rho)e^{in\theta} \qquad H_{|n|}^{(2)}(\sqrt{\lambda}\rho)e^{in\theta}$$

con $n\in\mathbb{Z}$.

Per t che tende a ∞ il comportamento asintotico di J_n e Y_n è

$$J_n(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos\left(t-\frac{2n+1}{4}\pi\right)+o\left(t^{-1/2}\right)$$
$$Y_n(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\,\mathrm{sen}\left(t-\frac{2n+1}{4}\pi\right)+o\left(t^{-1/2}\right)$$

e quindi

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(t)&=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\left(\cos\left(t-\frac{2n+1}{4}\pi\right)+i\,\mathrm{sen}\left(t-\frac{2n+1}{4}\pi\right)\right)+o\left(t^{-1/2}\right) \\ &=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}e^{i\left(t-\frac{2n+1}{4}\pi\right)}+o\left(t^{-1/2}\right) \\ H_n^{(2)}(t)&=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\left(\cos\left(t-\frac{2n+1}{4}\pi\right)-i\,\mathrm{sen}\left(t-\frac{2n+1}{4}\pi\right)\right)+o\left(t^{-1/2}\right) \\ &=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}e^{-i\left(t-\frac{2n+1}{4}\pi\right)}+o\left(t^{-1/2}\right). \end{aligned}$$

Perciò le soluzioni trovate verificano

$$\begin{aligned} H_{|n|}^{(1)}(\sqrt{\lambda}\rho)e^{in\theta}&=\sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{\lambda}\rho}}e^{i\left(\sqrt{\lambda}\rho-\frac{2|n|+1}{4}\pi\right)}e^{in\theta}+o\left(\rho^{-1/2}\right) \\ &=C_{n,\theta}\rho^{-1/2}e^{i\sqrt{\lambda}\rho}+o\left(\rho^{-1/2}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
H_{|n|}^{(2)}(\sqrt{\lambda}\rho)e^{in\theta} &= \sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{\lambda}\rho}}\, e^{-i\left(\sqrt{\lambda}\rho - \frac{2|n|+1}{4}\pi\right)} e^{in\theta} + o\left(\rho^{-1/2}\right) \\
&= D_{n,\theta}\rho^{-1/2} e^{-i\sqrt{\lambda}\rho} + o\left(\rho^{-1/2}\right).
\end{aligned}
$$

Consideriamo le funzioni R_1 e R_2 tali che

$$
R_1(\rho) = \rho^{-1/2} e^{i\sqrt{\lambda}\rho} \qquad R_2(\rho) = \rho^{-1/2} e^{-i\sqrt{\lambda}\rho}.
$$

Si ha

$$
\begin{aligned}
R_1'(\rho) &= -\frac{1}{2}\rho^{-3/2} e^{i\sqrt{\lambda}\rho} + i\sqrt{\lambda}\rho^{-1/2} e^{i\sqrt{\lambda}\rho} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{\rho} R_1(\rho) + i\sqrt{\lambda} R_1(\rho) \\
R_2'(\rho) &= -\frac{1}{2}\rho^{-3/2} e^{-i\sqrt{\lambda}\rho} - i\sqrt{\lambda}\rho^{-1/2} e^{-i\sqrt{\lambda}\rho} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{\rho} R_2(\rho) - i\sqrt{\lambda} R_2(\rho).
\end{aligned}
$$

Quindi abbiamo

$$
R_1'(\rho) - i\sqrt{\lambda} R_1(\rho) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\rho} R_1(\rho) = o\left(\rho^{-1/2}\right),
$$

mentre

$$
R_2'(\rho) - i\sqrt{\lambda} R_2(\rho) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\rho} R_2(\rho) - 2i\sqrt{\lambda} R_2(\rho) \sim c\rho^{-1/2}.
$$

Si può dimostrare che ciò che vale per R_1 vale anche per $H_n^{(1)}(\sqrt{\lambda}\rho)$, mentre ciò che vale per R_2 vale anche per $H_n^{(2)}(\sqrt{\lambda}\rho)$. Perciò le soluzioni dell'equazione di Helmholtz che soddisfano la condizione

$$
\lim_{\rho\to\infty} \sqrt{\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho,\theta) - i\sqrt{\lambda} u(\rho,\theta)\right) = 0
$$

sono combinazione lineare delle funzioni del tipo

$$
H_{|n|}^{(1)}(\sqrt{\lambda}\rho)e^{in\theta}.
$$

Le funzioni J_n e Y_n non hanno zeri comuni, quindi la funzione $H_n^{(1)}$ è sempre diversa da 0, perciò l'unica soluzione nulla su $\partial S(0,L)$ che soddisfa la condizione scritta sopra è quella identicamente nulla.

La condizione

$$
\lim_{\rho\to\infty} \sqrt{\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho,\theta) - i\sqrt{\lambda} u(\rho,\theta)\right) = 0
$$

è detta condizione di radiazione di Sommerfeld.

Con discorsi analoghi a quelli fatti per trattare l'equazione di Helmholtz in un cerchio con dato non omogeneo sulla frontiera, possiamo concludere che per $\lambda \in \mathbb{R}^+$ il problema non omogeneo

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) + \lambda u(x,y) = 0 & (x,y) \notin \overline{S(0,L)} \\ u(x,y) = f(x,y) & (x,y) \in \partial S(0,L) \\ \lim\limits_{\|(x,y)\| \to \infty} u(x,y) = 0 & \\ \lim\limits_{\|(x,y)\| \to \infty} \|(x,y)\|^{1/2} \Big(\dfrac{\langle \operatorname{grad} u(x,y), (x,y) \rangle}{\|(x,y)\|} - i\sqrt{\lambda} u(x,y) \Big) = 0\,, & \end{cases} \tag{9}$$

ha una soluzione che può essere espressa in forma di serie di potenze

$$v(\rho,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H_{|n|}^{(1)}(\sqrt{\lambda}\rho) e^{in\theta}$$

con i c_n scelti in modo che

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H_{|n|}^{(1)}(\sqrt{\lambda}L) e^{in\theta} = f(L\cos\theta, L\operatorname{sen}\theta)\,;$$

cioè $c_n H_{|n|}^{(1)}(\sqrt{\lambda}L)$ deve essere l' n -simo coefficiente dello sviluppo in serie di Fourier della funzione $\theta \mapsto f(L\cos\theta, L\operatorname{sen}\theta)$.

Soluzione fondamentale dell'equazione di Helmholtz

Cerchiamo ora una soluzione fondamentale per l'equazione di Helmholtz, cioè cerchiamo una distribuzione $u \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ tale che

$$\Delta u + \lambda u = \delta\,,$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Visto che il supporto della distribuzione δ è $\{(0,0)\}$, è ragionevole aspettarsi che per $(x,y) \neq (0,0)$ u verifichi l'equazione di Helmholtz nel senso delle funzioni. Cerchiamo quindi una distribuzione che sull'insieme $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ coincida con una funzione tale che

$$\Delta u(x,y) + \lambda u(x,y) = 0 \qquad (x,y) \neq (0,0)\,.$$

Questa equazione ha simmetria radiale, per questo motivo cerchiamo una u a simmetria radiale, cioè una funzione il cui valore in (x,y) dipende solo da $\|(x,y)\|$. È chiaro che non c'è nessun motivo per cui debbano esistere solo soluzioni radiali, ed in effetti esistono anche numerose soluzioni non radiali; tuttavia non ci interessano tutte le soluzioni, ma vogliamo trovarne almeno una. Perciò cerchiamo una soluzione nella forma $u(x,y) = f\big(\|(x,y)\|\big)$, dove f è una funzione definita su $\mathbb{R}^+$.

Ricordando l'espressione del laplaciano in coordinate polari, il fatto che u radiale soddisfi l'equazione di Helmholtz equivale a

$$f''(\rho) + \frac{1}{\rho} f'(\rho) + \lambda f(\rho) = 0\,.$$

Moltiplicando per ρ^2, questa diventa l'equazione (4) con $n=0$ ed abbiamo già visto che ha come soluzioni le funzioni

$$f(\rho)=c_1 J_0(\sqrt{\lambda}\rho)+c_2 Y_0(\sqrt{\lambda}\rho)\,.$$

Una soluzione fondamentale ha come laplaciano la distribuzione δ, quindi non può essere una funzione regolare. Per questo motivo ci interessa una f del tipo $f(\rho)=Y_0(\sqrt{\lambda}\rho)$.

Posto

$$u(x,y)=Y_0\big(\sqrt{\lambda(x^2+y^2)}\big)\,,$$

calcoliamo

$$\Delta u(x,y)+\lambda u(x,y)$$

nel senso delle distribuzioni.

Sia $v\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$.

$$\big\langle \Delta u(x,y)+\lambda u(x,y), v(x,y)\big\rangle=\big\langle u(x,y)), \Delta v(x,y)+\lambda v(x,y)\big\rangle\,.$$

Perciò, indicando con w la funzione v espressa in coordinate polari, abbiamo

$$\begin{aligned}
&\big\langle \Delta u(x,y)+\lambda u(x,y), v(x,y)\big\rangle=\\
&=\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\rho Y_0(\sqrt{\lambda}\rho)\times\\
&\qquad\times\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial\rho^2}(\rho,\theta)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial\rho}(\rho,\theta)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}(\rho,\theta)+\lambda w(\rho,\theta)\Big)\,d\theta\,d\rho\\
&=\int_0^{2\pi}\int_0^\infty Y_0(\sqrt{\lambda}\rho)\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}(\rho,\theta)\Big)\,d\rho\,d\theta\\
&\qquad+\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{1}{\rho}Y_0(\sqrt{\lambda}\rho)\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}(\rho,\theta)\,d\theta\,d\rho\\
&\qquad+\int_0^{2\pi}\int_0^\infty \lambda\rho Y_0(\sqrt{\lambda}\rho)w(\rho,\theta)\,d\rho\,d\theta\,.
\end{aligned}$$

Integrando per parti rispetto a ρ, abbiamo:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_0^\infty Y_0(\sqrt{\lambda}\rho)\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}(\rho,\theta)\Big)\,d\rho\,d\theta=\\
&\qquad=\int_0^{2\pi}\Big[Y_0(\sqrt{\lambda}\rho)\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}(\rho,\theta)\Big]_{\rho=0}^{\rho=\infty}\,d\theta\\
&\qquad\quad-\int_0^{2\pi}\int_0^\infty\sqrt{\lambda}\,Y_0'(\sqrt{\lambda}\rho)\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}(\rho,\theta)\,d\rho\,d\theta\,.
\end{aligned}$$

Il primo addendo è nullo, perché si può dimostrare che $\lim_{t\to 0} tY_0(t)=0$ ed inoltre $w(\rho)$ è nulla per ρ grande, visto che è ottenuta trasformando in coordinate polari una funzione a supporto compatto. Quindi otteniamo

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \sqrt{\lambda}\, Y_0'(\sqrt{\lambda}\rho)\rho \frac{\partial w}{\partial \rho}(\rho,\theta)\, d\rho\, d\theta\, .$$

Integrando nuovamente per parti, la quantità scritta sopra è uguale a:

$$-\int_0^{2\pi} \Big[\sqrt{\lambda}\, Y_0'(\sqrt{\lambda}\rho)\rho w(\rho,\theta)\Big]_{\rho=0}^{\rho=\infty} d\theta$$
$$+\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \Big(\lambda\rho Y_0''(\sqrt{\lambda}\rho) + \sqrt{\lambda}\, Y_0'(\sqrt{\lambda}\rho)\Big) w(\rho,\theta)\, d\rho\, d\theta\, .$$

Si può dimostrare che $\lim\limits_{t\to 0} t Y_0'(t) = 2/\pi$, quindi si ottiene

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} w(0,\theta)\, d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \Big(\lambda\rho Y_0''(\sqrt{\lambda}\rho) + \sqrt{\lambda}\, Y_0'(\sqrt{\lambda}\rho)\Big) w(\rho,\theta)\, d\rho\, d\theta\, .$$

Visto che w è la funzione v in coordinate polari, qualunque sia θ si ha $w(0,\theta) = v(0,0)$, quindi

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} w(0,\theta)\, d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} v(0,0)\, d\theta = 4v(0,0)\, .$$

Inoltre

$$\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho} Y_0(\sqrt{\lambda}\rho)\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}(\rho,\theta)\, d\theta\, d\rho = \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho} Y_0(\sqrt{\lambda}\rho)\Big[\frac{\partial w}{\partial \theta}(\rho,\theta)\Big]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\rho$$
$$= 0\, .$$

Perciò abbiamo

$$\big\langle \Delta u(x^2+y^2) + \lambda u(x^2+y^2), v(x,y)\big\rangle =$$
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \Big(\lambda\rho Y_0''(\sqrt{\lambda}\rho) + \sqrt{\lambda}\, Y_0'(\sqrt{\lambda}\rho) + \lambda\rho Y_0(\sqrt{\lambda}\rho)\Big) w(\rho,\theta)\, d\rho\, d\theta$$
$$+ 4v(0,0)\, .$$

La funzione Y_0 è soluzione dell'equazione di Bessel di ordine 0

$$t^2 y''(t) + t y'(t) + t^2 y(t) = 0\, ,$$

quindi, ponendo $t = \sqrt{\lambda}\rho$,

$$\lambda\rho^2 Y_0''(\sqrt{\lambda}\rho) + \sqrt{\lambda}\rho Y_0'(\sqrt{\lambda}\rho) + \lambda\rho^2 Y_0(\sqrt{\lambda}\rho) = 0\, ;$$

perciò il primo addendo scritto sopra è nullo, e abbiamo

$$\big\langle \Delta Y_0\big(\sqrt{\lambda(x^2+y^2)}\big) + \lambda Y_0\big(\sqrt{\lambda(x^2+y^2)}\big), v(x,y)\big\rangle = 4v(0,0) = 4\langle \delta, v\rangle\, ;$$

quindi $\frac{1}{4} Y_0\big(\sqrt{\lambda(x^2+y^2)}\big)$ è soluzione fondamentale per l'equazione di Helmholtz.