Prova scritta di ANALISI MATEMATICA L-D 7/1/09

(Ingegneria delle telecomunicazioni e ingegneria elettronica)

COGNOME E NOME ....

Non posso sostenere la prova orale nel giorno

venerdì 9/1 mattina ☐ lunedì 12/1 mattina ☐

pomeriggio ☐ pomeriggio ☐

---

(1) Siano $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } |x| > 3 \\ 2|x|\,, & \text{se } |x| \le 3 \end{cases}$$

e g la distribuzione $\delta''(x) + \delta'(x+2)$.
Calcolare la convoluzione $f * g$.

Soluzione: $(f * g)(x) = 6\delta'(x+3) + 4\delta(x) - 6\delta'(x-3) - 2\chi_{[-5,-2]}(x) + 2\chi_{[-2,1]}(x) + 6\delta(x+5) - 6\delta(x-1)$

---

(2) Risolvere, mediante la funzione di Green, il seguente problema

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\big(x^7 y'(x)\big) - 9x^5 y(x) = x^4 & x \in \,]1,2[\\ y(1) = 0 \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

Soluzione: $y(x) = \dfrac{1}{4}\,x^{-3} + \dfrac{3}{4\log 2}x^{-3}\log x - \dfrac{1}{4}\,x^{-1}$

---

(3) Trovare, col metodo delle serie di potenze, due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale

$$2x^2 y''(x) + (x^2 + 5x)y'(x) + (2x - 9)y(x) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}^+$$

Soluzione: $y(x) = x^{-3} - \dfrac{1}{7}\,x^{-2}\,,\ y(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k!(2k+7)(2k+9)} x^{k+3/2}$

---

(4) Risolvere il seguente problema di valori al contorno

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 & (x,y) \in \,]0,4\pi[\, \times \,]0,\pi[\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0 & y \in [0,\pi] \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(4\pi,y) = 0 & y \in [0,\pi] \\ u(x,0) = |x - 2\pi| & x \in [0,4\pi] \\ u(x,\pi) = 0 & x \in [0,4\pi] \end{cases}$$

Soluzione: $u(x,y) = \pi - y + \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k+1)^2 \sinh\left(\frac{2k+1}{6}\,\pi\right)} \cos\Big(\frac{2k+1}{2}\,x\Big) \sinh\Big(\frac{2k+1}{6}(\pi - y)\Big)$