Facoltà di Ingegneria dell'Università di Bologna
Corsi di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni
e in Ingegneria Elettronica
Anno Accademico 2009/2010
Corso di Analisi Matematica L-D
Docente prof. G. Dore

Esercizi

---

(1) Siano $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -3 \,, \\ 3 - |x| & \text{se } -3 \le x \le 3 \,, \\ 0 & \text{se } x > 3 \,, \end{cases}$$

e g la distribuzione $\delta'' + 2\delta'$. Calcolare la convoluzione $f * g$.

---

(2) Siano $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = \begin{cases} 0 \,, & \text{se } x < 2 \\ x - 2 \,, & \text{se } x \ge 2 \end{cases}$$

e g la distribuzione $\delta''(x) + \delta(x-4)$. Calcolare la convoluzione $f * g$.

---

(3) Siano $f = \delta' + \chi_{[-1,1]}$ e $g = \delta' + \chi_{[0,+\infty[}$.
Calcolare la convoluzione $f * g$.

---

(4) Trovare la funzione di Green del problema

$$\begin{cases} -x^4 y''(x) - 4x^3 y'(x) - 2x^2 y(x) = f(x) & x \in \,]1,2[\\ y'(1) = 0 \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

sapendo che l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è $c_1 x^{-1} + c_2 x^{-2}$.

(5) Risolvere, mediante la funzione di Green, il seguente problema

$$\begin{cases} y''(x) + 9y(x) = x & x \in]0, 2\pi[\\ y'(0) = 0 \\ y(2\pi) = 0 \end{cases}$$

(6) Risolvere, mediante la funzione di Green, il seguente problema

$$\begin{cases} y''(x) - 9y(x) = x + 1 & x \in]0, 2[\\ y(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases}$$

(7) Trovare, col metodo delle serie di potenze, una soluzione non nulla dell'equazione differenziale

$$x^2 y''(x) + (3x - 6)y(x) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}^+$$

(8) Trovare, col metodo delle serie di potenze, una soluzione illimitata per x che tende a 0 dell'equazione differenziale

$$2xy''(x) + 5y'(x) + 4x^2 y(x) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}^+$$

(9) Trovare, col metodo delle serie di potenze, due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale

$$(4x^2 + 12x)y''(x) + (4x + 6)y'(x) - y(x) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}^+$$

(10) Facendo uso della trasformata di Fourier, risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + u(x,t) & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = e^{-x^2} & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(11) Facendo uso della trasformata di Fourier, risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - u(x,t) & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = \chi_{[-5,5]}(x) \end{cases}$$

(12) Facendo uso della trasformata di Fourier, risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - u(x,t) & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = \chi_{[0,1]}(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(13) Risolvere il seguente problema di valori al contorno

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 & (x,y) \in]0,\pi[\times]0,\pi[\\ u(0,y) = 0 & y \in [0,\pi] \\ u(\pi,y) = 0 & y \in [0,\pi] \\ u(x,0) = x(\pi - x) & x \in [0,\pi] \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}u(x,\pi) = 0 & x \in [0,\pi] \end{cases}$$

(14) Risolvere il seguente problema di valori al contorno

$$\begin{cases} 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 & (x,y) \in]0,\pi[\times]0,1[\\ u(0,y) = 0 & y \in [0,1] \\ u(\pi,y) = 0 & y \in [0,1] \\ u(x,0) = \dfrac{\pi}{2} - \left|x - \dfrac{\pi}{2}\right| & x \in [0,\pi] \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}u(x,1) = 0 & x \in [0,\pi] \end{cases}$$

(15) Trovare autovalori e autofunzioni del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) + \lambda u(x,y) = 0 & (x,y) \in]0,\pi[\times]0,2\pi[\\ u(0,y) = 0 & y \in [0,2\pi] \\ u(\pi,y) = 0 & y \in [0,2\pi] \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0 & x \in [0,\pi] \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}u(x,2\pi) = 0 & x \in [0,\pi] \end{cases}$$

(16) Trovare autovalori e autofunzioni del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + 2\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) + \lambda u(x,y) = 0 & (x,y) \in \left]-\pi,\pi\right[\times \left]0,\dfrac{\pi}{3}\right[\\ u(-\pi,y) = 0 & y \in \left[0,\dfrac{\pi}{3}\right] \\ u(\pi,y) = 0 & y \in \left[0,\dfrac{\pi}{3}\right] \\ u(x,0) = 0 & x \in [-\pi,\pi] \\ u\Big(x,\dfrac{\pi}{3}\Big) = 0 & x \in [-\pi,\pi] \end{cases}$$

(17) Trovare autovalori e autofunzioni del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - 2\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) + \lambda u(x,y) = 0 & (x,y) \in \left]0,\pi\right[\times \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[\\ u(0,y) = 0 & y \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right] \\ u(\pi,y) = 0 & y \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right] \\ u(x,0) = 0 & x \in [0,\pi] \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big(x,\dfrac{\pi}{2}\Big) = 0 & x \in [0,\pi] \end{cases}$$

(18) Trovare autovalori e autofunzioni del problema

$$\begin{cases} 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + 16\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) + \lambda u(x,y) = 0 & (x,y) \in \left]-\pi,\pi\right[\times \left]0,\pi\right[\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(-\pi,y) = 0 & y \in [0,\pi] \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,y) = 0 & y \in [0,\pi] \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0 & x \in [-\pi,\pi] \\ u(x,\pi) = 0 & x \in [-\pi,\pi] \end{cases}$$

Soluzioni

(1) $\quad (f*g)(x) = \delta(x+3) - 2\delta(x) + \delta(x-3) + 2\chi_{]-3,0[}(x) - 2\chi_{]0,3[}(x)$

(2) $\quad (f*g)(x) = \delta(x-2) + f(x-4)$

(3) $\quad (f*g)(x) = \delta''(x) + \delta'(x+1) - \delta'(x-1) + \delta'(x) + \varphi(x)$ con φ tale che

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -1 \\ 1+x & \text{se } -1 \le x \le 1 \\ 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

(4) $$G(x,\xi) = \begin{cases} -\frac{1}{3}\big(2x^{-1} - x^{-2}\big)\big(\xi^{-1} - 2\xi^{-2}\big) & 1 \le x \le \xi \le 2 \\ -\frac{1}{3}\big(x^{-1} - 2x^{-2}\big)\big(2\xi^{-1} - \xi^{-2}\big) & 1 \le \xi \le x \le 2 \end{cases}$$

(5) $$y(x) = -\frac{1}{27}\operatorname{sen}(3x) - \frac{2}{9}\pi\cos(3x) + \frac{1}{9}\,x$$

(6) $$y(x) = \frac{3\cosh(6-3x) + \operatorname{senh}(3x)}{27\cosh 6} - \frac{x+1}{9}$$

(7) $$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k}{k!(k+5)!} x^{k+3}$$

(8) $$y(x) = x^{-3/2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n x^{3n-3/2}}{9^n n!\,(2n-1)!!}$$

(9) $$y(x) = x^{1/2}\,,\ y(x) = 1 + \frac{1}{6}\,x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{6^n n!}\,x^n$$

(10) $$u(x,t) = \frac{e^t}{\sqrt{1+8t}}\,e^{-\frac{\xi^2}{1+8t}}$$

(11) $$u(x,t) = \frac{e^{-t}}{2\sqrt{\pi t}}\int_{x-5}^{x+5} e^{-\frac{\xi^2}{4t}}\,d\xi$$

(12) $$u(x,t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{12\pi t}}\int_{x-1}^{x} e^{-\frac{y^2}{12t}}\,dy$$

(13) $$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8\operatorname{sen}\big((2k+1)x\big)\cosh\big(\frac{2k+1}{2}(\pi - y)\big)}{\pi(2k+1)^3\cosh\big(\frac{2k+1}{2}\pi\big)}$$

(14) $$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4(-1)^k\operatorname{sen}\big((2k+1)x\big)\cosh\big(\frac{2}{3}(2k+1)(1-y)\big)}{\pi(2k+1)^2\cosh\big(\frac{2}{3}(2k+1)\big)}$$

(15) Autovalori $\lambda = m^2 + n^2$ con $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, autofunzioni $u(x,y) = c \operatorname{sen}(mx) \cos\left(\frac{n}{2} y\right)$

(16) Autovalori $\lambda = 1 + \left(\frac{m}{2}\right)^2 + 9n^2$ con $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, autofunzioni $u(x,y) = ce^{-x} \operatorname{sen}\left(\frac{m}{2} x\right) \operatorname{sen}\left(3ny\right)$ per m pari, $u(x,y) = ce^{-x} \cos\left(\frac{m}{2} x\right) \operatorname{sen}\left(3ny\right)$ per m dispari.

(17) Autovalori $\lambda = m^2 + n^2 + 1$ con $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ dispari, autofunzioni $u(x,y) = ce^{x} \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(ny)$

(18) Autovalori $\lambda = 9\left(\frac{m}{2}\right)^2 + 16\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$ con $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, autofunzioni $u(x,y) = c \cos\left(\frac{m}{2} x\right) \cos\left(\frac{2n+1}{2} y\right)$ per m pari, $u(x,y) = c \operatorname{sen}\left(\frac{m}{2} x\right) \cos\left(\frac{2n+1}{2} y\right)$ per m dispari.