

**ELENCO DELLE POSSIBILI DOMANDE DI CALCOLO DELLE  
PROBABILITÀ CHE POTREBBERO ESSERE CHIESTE DURANTE LA  
PRIMA PROVA SCRITTA DI COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA  
ED ELEMENTI DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ PER L'A.A.  
2011/2012**

FAUSTO FERRARI

1. DOMANDE DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

**Serie.** Definizione di serie numerica. Definizione di serie numerica convergente. Definizione di serie divergente in  $\mathbb{C}$  e in  $\mathbb{R}$ . Definizione di serie irregolare. Condizione necessaria per la convergenza di una serie numerica. Teorema: condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di una serie numerica. Serie numeriche reali. La serie geometrica. Teorema: le serie numeriche a termini positivi non sono irregolari. Criterio di convergenza per le serie numeriche reali a termini positivi : criterio del confronto, criterio del confronto asintotico. Criterio di convergenza per le serie numeriche reali a termini positivi: il criterio integrale. Criteri di convergenza per serie numeriche a termini non sempre positivi: criterio di Leibniz e criterio di Dirichlet. Definizione di serie assolutamente convergente. Teorema: serie assolutamente convergenti sono anche convergenti. Esistono serie che non sono assolutamente convergenti che per  $\phi$  sono convergenti: esempi. Teorema di Riemann-Dini. Proprietà di stabilità delle serie assolutamente convergenti.

**Elementi di probabilità.** Definizione di  $\sigma$ -algebra. Definizione di probabilità. Definizione di  $\sigma$ -additività. Definizione di spazio di probabilità. Definizione di spazio degli eventi. Probabilità di eventi disgiunti. Definizione di probabilità uniforme su insiemi discreti. Proprietà della funzione di probabilità. Probabilità dell'unione di due eventi. Definizione di probabilità condizionale. Definizione di partizione di un insieme. Formula delle probabilità totali. Formula di Bayes. Definizione di due eventi indipendenti. Definizione di  $n$  eventi indipendenti.

**Calcolo combinatorio.** Definizione di cardinalità di un insieme. Cardinalità di un insieme prodotto cartesiano di insiemi di cardinalità finita. La definizione di fattoriale. La definizione di coefficiente binomiale. Definizione di disposizione e cardinalità delle funzioni iniettive tra insiemi di cardinalità finita. Definizione di permutazione. Definizione di combinazione. Significato delle precedenti cardinalità in termini di cardinalità degli insiemi di funzioni. Cardinalità dell'insieme dei sottoinsiemi di cardinalità  $k$  di un insieme di cardinalità  $m \geq k$  Cardinalità dell'insieme delle funzioni iniettive con dominio e codominio di cardinalità finita. Cardinalità dell'insieme delle funzioni con dominio e codominio di cardinalità finita.

**Variabili aleatorie discrete.** Definizione di variabile aleatoria in uno spazio di probabilità. Definizione di variabile aleatoria discreta. Definizione di legge o distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria discreta. Definizione di funzione di densità discreta. Definizione di funzione di densità discreta di una variabile aleatoria discreta. La variabile aleatoria indicatrice. Densità di probabilità di Bernoulli. Legge  $B(n, p)$  di parametro  $p$ . Distribuzione ipergeometrica. Densità geometrica di parametro  $p$ . Densità geometrica modificata. Densità di Poisson. Definizione di funzione di ripartizione di una variabile aleatoria discreta. Definizione di densità congiunta di una famiglia di v.a. discrete. Definizione di densità marginali di una variabile aleatoria  $m$  dimensionale. Definizione di variabili aleatorie indipendenti. Teorema: se le variabili aleatorie sono indipendenti è possibile determinare la densità congiunta a partire dalle varietà marginali.

Teorema: se  $X_1, \dots, X_m$  sono v.a. discrete indipendenti rispettivamente di legge  $B(n_1, p), \dots, B(n_m, p)$  e  $n_1 + \dots + n_m = n$  allora  $X_1 + \dots + X_m$  ha legge  $B(n, p)$ . Definizione di speranza matematica finita per una v.a. discreta. Teorema  $\phi$  sull'esistenza della speranza matematica finita della v.a.  $Z = \phi(X)$  di una variabile aleatoria discreta  $X$ . Proprietà di linearità della speranza matematica finita di v.a. discrete. La speranza matematica del prodotto di variabili aleatorie indipendenti. Definizione di momento di ordine  $k$ . Definizione di momento centrato di ordine  $k$ . Teorema sui momenti di ordine  $r$  per momenti di ordine  $r \leq k$ . Variabili aleatorie  $X$  e  $Y$  di ordine  $k$  finito e esistenza del momento di ordine  $k$  di  $X + Y$ . Definizione di varianza. Teorema sulla disuguaglianza di Chebyshev. Definizione di deviazione standard. Proprietà della varianza di una v.a. discreta rispetto al prodotto per una costante e alla somma di una variabile aleatoria e di una costante. Definizione di covarianza. Proprietà delle variabili indipendenti rispetto alla varianza e alla covarianza. Speranza matematica e varianza di una variabile aleatoria con distribuzione  $B(n, p)$ . Definizione di coefficiente di correlazione. Definizione di convergenza in probabilità di una successione di variabili aleatorie. Teorema sulla legge dei Grandi Numeri. Definizione di retta di regressione per variabili aleatorie.

**Modelli continui.** Definizione di variabile aleatoria reale. Definizione di funzione di ripartizione per una variabile aleatoria reale. Definizione di funzione di ripartizione continua. Definizione di funzione di ripartizione assolutamente continua. La probabilità di  $P(X = a)$  per una variabile aleatoria reale con funzione di ripartizione continua. Definizione di densità di una variabile aleatoria assolutamente continua. Proprietà della funzione di ripartizione di una variabile reale. Definizione di v.a. reale con densità. Proprietà delle funzioni di densità. Definizione di v.a. reale con densità uniforme. Definizione di densità esponenziale. Definizione di quantile. Definizione di mediana. Definizione di variabile aleatoria ottenuta per composizione con una funzione. Calcolo della densità di variabile aleatoria ottenuta per composizione con una funzione. Densità di  $aX + b$  con  $a \neq 0$  per  $X$  v.a. di densità  $f$ . Definizione di v.a. simmetrica. Definizione di variabili aleatorie reali indipendenti. Definizione di densità congiunta di variabili aleatorie reali. Definizione di densità normale o gaussiana di parametri  $\mu, \sigma^2$ . Proprietà delle densità gaussiane. Definizione di densità marginale. Relazioni tra densità marginali e densità congiunta di variabili aleatorie indipendenti. Teorema sul calcolo della densità della variabile somma di due variabili aleatorie. Definizione di convoluzione tra due funzioni. Relazione tra la densità della somma di due variabili aleatorie indipendenti e le densità marginali. Definizione di speranza matematica finita per variabili aleatorie reali con con funzione di ripartizione assolutamente continua. Proprietà di linearità della speranza matematica per variabili aleatorie reali con con funzione di ripartizione assolutamente continua. Definizione di momento di ordine  $k$  di una variabile aleatoria con funzione di ripartizione assolutamente continua. Definizione di momento di ordine  $k$  centrato di una variabile aleatoria con funzione di ripartizione assolutamente continua. Definizione di varianza di una variabile aleatoria, con funzione di ripartizione assolutamente continua, di speranza matematica finita. Proprietà della varianza di una variabile aleatoria con funzione di ripartizione assolutamente continua.