

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA E ELEMENTI DI
CALCOLO DELLE PROBABILITA' (Primo appello, parte di
Elementi di Calcolo delle Probabilità) del 17/06/2013

COGNOME....., NOME....., n. mat.
Riconsegnare il testo. Rispondere alle domande, con esaurienti motivazioni, nel riquadro sottostante.

(1) [1,5 punti] Sia X una variabile aleatoria reale di densità normale $N(0,1)$. Determinare la densità della variabile aleatoria $X^2 + 7$.

(2) [1 punto] Scrivere l'enunciato della legge sui grandi numeri. [1 punto] Scrivere il Teorema sulla disuguaglianza di Chebyshev.

(3) [1 punto] In una biblioteca ci sono 11 scaffali ciascuno contenete 100 libri. Dovendo prendere casualmente 10 libri calcolare la probabilità che nessuno di questi venga preso dallo scaffale 1.

(4) [1 punto] I vigili urbani sanno che il 5% delle auto circolanti non è assicurata. Una pattuglia effettua 97 controlli casuali. Calcolare la probabilità che almeno 50 delle automobili fermate sia non assicurata.

(5) [1 punto] Scrivere la definizione di densità marginale, nel caso non discreto, della variabile aleatoria X nota la densità congiunta f delle variabili aleatorie X e Y

(6) Siano X e Y due variabili aleatorie di densità congiunta $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{100}, & (x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 5, \quad |y| \leq 5\} \\ 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 5, \quad |y| \leq 5\}. \end{cases}$$

(i) [1 punto] Calcolare $P(X + Y > 0)$.

(ii) [1 punto] Calcolare le densità marginali f_X e f_Y .

(7) Sia assegnato

$$A = \{(5, 2), (5, 4), (3, 3), (3, 5), (3, 2)\}.$$

(i) [1,5 punti] Dopo aver calcolato il valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la funzione $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$,

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{\alpha}{x + 2y}, & (x, y) \in A \\ 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A, \end{cases}$$

sia una densità, calcolare le densità marginali p_X , p_Y , le speranze matematiche $E[X]$, $E[Y]$, la varianza $\text{Var}(X)$, e la covarianza $\text{Cov}(X, Y)$.

(ii) **[Facoltativo, punteggio non utile per l'ammissione 0,5 punti]** Verificare se le due variabili aleatorie X e Y sono indipendenti (la risposta deve essere motivata).

(iii) **[Facoltativo, punteggio non utile per l'ammissione 0,5 punti]** Scrivere l'equazione della retta di regressione.

(8) [1 punto] Scrivere la definizione di spazio di probabilità (elencando gli assiomi di Kolmogorov, cioè precisando che cos'è una σ -algebra e quali proprietà ha la funzione di probabilità).