COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA E ELEMENTI DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (Prima prova parziale della parte di Elementi di Calcolo delle Probabilità) del 15/05/2013

COGNOME..........................., NOME.........................., numero di matricola ....
Riconsegnare il testo. Rispondere alle domande, con esaurienti motivazioni, nel riquadro sottostante e/o nel foglio protocollo allegato.

---

(1) Sia

$$\sum_{n=1}^{\infty} c(\alpha) \frac{n^{\alpha} + n^{\frac{9}{11}}}{\sin(\frac{9}{11}n) + n^{\frac{11}{9}\alpha} + 3}$$

con $c(\alpha)$ numero reale e $\alpha > 0$.

(i) [1,5 punti] Per quali α è possibile determinare una costante positiva per cui la funzione $p : \mathbb{R} \to [0, 1]$,

$$p(x) = \begin{cases} c(\alpha) \dfrac{x^{\alpha} + x^{\frac{9}{11}}}{\sin(\frac{9}{11}x) + x^{\frac{11}{9}\alpha} + 3}, & x \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1 \\ 0, \quad \mathbb{R} \setminus (\mathbb{N} \cup \{0\}) \end{cases}$$

definisce una densità di probabilità.

(ii) (**Facoltativo** [0,5 punti]) Se X è la variabile aleatoria di densità p definita nel punto (i) di questo esercizio, calcolare $P(X \leq 4)$.

---

(2) In una scatola vi sono 15 caramelle al limone e 12 caramelle alla fragola. (i) [1 punto] Calcolare la probabilità che prendendo a caso 5 caramelle vi siano almeno 3 caramelle al limone. (ii) [0,5 punti] Supponiamo che siano state mangiate 15 caramelle di cui non si conosce il gusto. Calcolare la probabilità che estraendo un'altra caramella questa sia al gusto di limone.

---

(3) Siano dati 7 dadi. Definiamo una prova come il lancio dei 7 dadi. (i)[1 punto] Calcolare la probabilità che in una prova si ottengano 6 facce recanti il numero 3 e una faccia con il numero 6. (ii) [1 punto] Si eseguano 17 prove. Calcolare la probabilità che almeno 14 prove realizzino ciascuna 6 numeri 3 e un 6.

(4) [1 punto] Scrivere la definizione di spazio di probabilità (precisando quali assiomi devono essere soddisfatti).

(5) [1 punto] Scrivere la definizione di serie assolutamente convergente e quali sono le principali proprietà che le serie convergenti hanno rispetto alle serie (semplicemente) convergenti.

(6) [1 punto] Scrivere la definizione di variabili aleatorie discrete reali indipendenti.

(7) Sia assegnato

$$A = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3)\}.$$

(i) [1 punto] Calcolare il valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la funzione $p : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$,

$$p(i,j) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{i+j}, & (i,j) \in A \\ 0, & (i,j) \in \mathbb{R}^2 \setminus A, \end{cases} \tag{1}$$

è una densità di probabilità.

(ii) [1 punto] Siano X e Y sono due variabili aleatorie di densità discreta congiunta p, come assegnata al punto (i) di questo esercizio. Calcolare

$$E[X+Y].$$

(iii) (**Facoltativo** [0,5 punti]) Calcolare le densità marginali p_X e p_Y della variabile aleatoria $2-$ dimensionale (X,Y) definita al punto (ii). Calcolare $E[X]$ e $E[Y]$.

(8) [1 punto] Scrivere la definizione di variabile aleatoria in uno spazio di probabilità.