Esercizio
Sia
$$\sum_{n=1}^{\infty} c(\alpha)\frac{n^{\alpha}+n^{\frac{9}{11}}}{\sin(\frac{9}{11}n)+n^{\frac{11}{9}\alpha}+3}$$
con $c(\alpha)$ numero reale e $\alpha > 0$.

(i) [1,5 punti] Stabilire per quali α è possibile determinare una costante positiva per cui la funzione $p : \mathbb{R} \to [0,1]$,
$$p(x) = \begin{cases} c(\alpha)\frac{x^{\alpha}+x^{\frac{9}{11}}}{\sin(\frac{9}{11}x)+x^{\frac{11}{9}\alpha}+3}, & x \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1 \\ 0, & \mathbb{R} \setminus (\mathbb{N} \cup \{0\}) \end{cases}$$
definisce una densità di probabilità.

(ii) (**Facoltativo** [0,5 punti]) Se X è la variabile aleatoria di densità p definita nel punto (i) di questo esercizio, calcolare $P(X \leq 4)$.

Svolgimento.

Affinché si possa individuare la costante α bisogna che la serie sia convergente. In particolare perché p sia una densità di probabilità occorre che ogni termine della serie sia positivo. In effetti numeratore e denominatore sono sempre positivi. Si tratta di una serie a termini positivi. Possiamo applicare il criterio del confronto asintotico. In particolare studiamo il comportamento asintotico di
$$\frac{n^{\alpha}+n^{\frac{9}{11}}}{\sin(\frac{9}{11}n)+n^{\frac{11}{9}\alpha}+3}$$
distinguendo du casi.

(a) Supponiamo che $\alpha > \frac{9}{11}$.

Allora, per $n \to +\infty$
$$\frac{n^{\alpha}+n^{\frac{9}{11}}}{\sin(\frac{9}{11}n)+n^{\frac{11}{9}\alpha}+3} \sim \frac{n^{\alpha}}{n^{\frac{11}{9}\alpha}} \sim \frac{1}{n^{\frac{2}{9}\alpha}}.$$
Il termine $n-$esimo della serie è asintotico al termine $n-$esimo della serie armonica generalizzata di esponente $\frac{2}{9}\alpha$. Pertanto la serie sarà convergente se e solo se
$$\begin{cases} \alpha > \frac{9}{11}, \\ \frac{2}{9}\alpha > 1, \end{cases}$$
ovvero per $\alpha > \frac{9}{2}$.

(a) Supponiamo che $\alpha \leq \frac{9}{11}$. Allora, per $n \to +\infty$

$$\frac{n^{\alpha} + n^{\frac{9}{11}}}{\sin(\frac{9}{11}n) + n^{\frac{11}{9}\alpha} + 3} \sim k(\alpha)\frac{n^{\frac{9}{11}}}{n^{\frac{11}{9}\alpha}} \sim k(\alpha)\frac{1}{n^{\frac{11}{9}\alpha - \frac{9}{11}}},$$

dove $k(\alpha) = 1$ se $\alpha < \frac{9}{11}$ e $k(\alpha) = 2$ se $\alpha = \frac{9}{11}$. Pertanto, il termine $n-$esimo della serie è asintotico al termine $n-$esimo della serie armonica generalizzata di esponente $\frac{11}{9}\alpha - \frac{9}{11}$. Quindi la serie sarà convergente se e solo se

$$\begin{cases} \alpha \leq \frac{9}{11}, \\ \frac{11}{9}\alpha - \frac{9}{11} > 1, \end{cases}$$

ovvero se e solo se

$$\begin{cases} \alpha \leq \frac{9}{11}, \\ \alpha > \frac{180}{121}. \end{cases}$$

Poiché non esistono soluzioni del precedente sistema concludiamo che la serie non converge per $\alpha \leq \frac{9}{11}$.

Possiamo allora rispondere alla prima domanda affermando che p sarà una densità di probabilità solo se $\alpha > \frac{9}{2}$. In tal caso determiniamo $c(\alpha)$ risolvendo l'equazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} c(\alpha)\frac{n^{\alpha} + n^{\frac{9}{11}}}{\sin(\frac{9}{11}n) + n^{\frac{11}{9}\alpha} + 3} = 1,$$

da cui si ricava:

$$c(\alpha) = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha}+n^{\frac{9}{11}}}{\sin(\frac{9}{11}n)+n^{\frac{11}{9}\alpha}+3}}.$$

Per rispondere al secondo quesito (facoltativo) è sufficiente realizzare che la successione delle somme parziali di ordine n della serie (quando $\alpha > \frac{9}{11}$ e $c(\alpha)$ è il valore ricavato affinche p sia una densità di probabilità) individua la funzione di ripartizione della variabile aleatoria X di densità p definita al punto (i). Quindi

$$P(X \leq 4) = \sum_{n=1}^{4} c(\alpha)\frac{n^{\alpha} + n^{\frac{9}{11}}}{\sin(\frac{9}{11}n) + n^{\frac{11}{9}\alpha} + 3} = \frac{\sum_{n=1}^{4} \frac{n^{\alpha}+n^{\frac{9}{11}}}{\sin(\frac{9}{11}n)+n^{\frac{11}{9}\alpha}+3}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha}+n^{\frac{9}{11}}}{\sin(\frac{9}{11}n)+n^{\frac{11}{9}\alpha}+3}}.$$

Esercizio

In una scatola vi sono 15 caramelle al limone e 12 caramelle alla fragola.

(i) [1 punto] Calcolare la probabilità che prendendo a caso 5 caramelle vi siano almeno 3 caramelle al limone. (ii) [0,5 punti] Supponiamo che siano state mangiate 15 caramelle di cui non si conosce il gusto. Calcolare la probabilità che estraendo un'altra caramella questa sia al gusto di limone.

Svolgimento.

Si effettuano 5 estrazioni senza rimpiazzo. Abbiamo una densità ipergeometrica per cui se A_k indica l'evento corrispondente all'estrazione di k caramelle al limone e $n-k$ alla fragola, otteniamo:

$$P(A_k) = \frac{\binom{15}{k}\binom{12}{5-k}}{\binom{27}{5}}.$$

Pertanto se X è la variabile aleatoria che conta il numero di caramelle al limone tra le 5 estratte secondo la densità ipergometrica abbiamo:

$$P(X \geq 3) = P(X=3)+P(X=4)+P(X=5) = \frac{\binom{15}{3}\binom{12}{2}}{\binom{27}{5}} + \frac{\binom{15}{4}\binom{12}{1}}{\binom{27}{5}} + \frac{\binom{15}{5}\binom{12}{0}}{\binom{27}{5}}$$

$$= \frac{\frac{15\cdot 14\cdot 13}{6}\frac{11\cdot 12}{2}}{\frac{22\cdot 23\cdot 24\cdot 25\cdot 26\cdot 27}{5!}} + \frac{\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{24}12}{\frac{22\cdot 23\cdot 24\cdot 25\cdot 26\cdot 27}{5!}} + \frac{\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{120}}{\frac{22\cdot 23\cdot 24\cdot 25\cdot 26\cdot 27}{5!}}$$

$$= \frac{5\cdot 7\cdot 13\cdot 11\cdot 6}{\frac{22\cdot 23\cdot 24\cdot 25\cdot 26\cdot 27}{5!}} + \frac{15\cdot 7\cdot 13\cdot 12}{\frac{22\cdot 23\cdot 24\cdot 25\cdot 26\cdot 27}{5!}} + \frac{3\cdot 7\cdot 13\cdot 11}{\frac{22\cdot 23\cdot 24\cdot 25\cdot 26\cdot 27}{5!}}.$$

Se sono state mangiate 15 caramelle di cui non si conosce il sapore, la probabilità che la successiva sia al limone è uguale alla pobabilità che si al limone la prima caramella estratta. Cioè $\frac{5}{9}$. Infatti se

$$\Omega = \{\omega : \{1, 16\} \to \{1, \ldots 27\} : \ \omega \quad \text{è iniettiva}\}$$

è lo spazio degli eventi elementari corrispondenti a 16 estrazioni, allora l'insieme delle funzioni di Ω per cui $\omega(16)$ è una caramella al limone ha la stessa cardinalità dell'insieme di tutte le funzioni per cui $\omega(1)$ è una caramella al limone. Infatti esiste una corrispondenza biunivoca tra i due insiemi espressa nel modo seguente. A ogni funzione ω per cui $\omega(16)$ è una caramella al limone si fa corrispondere la funzione η per cui $\eta(1) = \omega(16)$, $\eta(j) = \omega(j)$, $j = 2, \ldots, 15$ e $\eta(16) = \omega(1)$. Essendo ogni evento elementare equiprobabile e avendo i due insiemi la stessa cardinalità le rispettive probabilità sono uguali. La cardinalità dell'insieme per cui la prima caramella è al limone ha cardinalità pari a $15\#D_{15}^{26} = 15\frac{26!}{11!}$. D'altra parte $\#\Omega = \frac{27!}{11!}$ quindi

$$P(L_{16}) = \frac{15\#D_{15}^{26}}{\#\Omega} = \frac{15}{27} = \frac{5}{9}.$$

Ovviamente, una volta provato che la probabilità dell'evento cercato è la stessa dell'evento per cui la prima caramella estratta sia al limone ècomunque immediato calcolare il valore di $\frac{15}{27} = \frac{5}{9}$.

Esercizio

Siano dati 7 dadi. Definiamo una prova come il lancio dei 7 dadi. (i)[1 punto] Calcolare la probabilità che in una prova si ottengano 6 facce recanti il numero 3 e una faccia con il numero 6. (ii) [1 punto] Si eseguano 17 prove. Calcolare la probabilità che almeno 14 prove realizzino ciascuna 6 numeri 3 e un 6.

Svolgimento.

L'uscita di una delle sei facce di ciascun cubo è equiprobabile e pertanto è pari a $\frac{1}{6}$.

Quindi la probabilità che i primi 6 dadi indichino ciascuno il 3 e il settimo il 6 è pari a $\frac{1}{6^5}$. D'altra parte, poichè non viene precisato un ordine d'uscita di questi risultati, dobbiamo moltiplicare questa probabilità anche per il numero di sottoinsiemi di cardinalià uno in un insieme di cardinalità 7 (o equivalentemente quanti sono i sottoinsiemi di cardinalità 6 in un insieme di cardinalià 7). Avremo allora che la probabilità dell'evento considerato è $p = \binom{7}{1} 6^{-7} = \frac{7}{6^7}$.

A questo punto si eseguono 17 prove. Se X indica la variabile aleatoria che conta i successi delle prove abbiamo una densità di probabilità di Bernoulli $B(17, \frac{7}{6^7})$. La probabilità dell'evento corrispondente al successo in almeno 14 lanci è

$$P(X \geq 14) = \sum_{k=14}^{17} \binom{17}{k} (\frac{7}{6^7})^k (1 - \frac{7}{6^7})^{17-k}.$$

Esercizio

Sia assegnato

$$A = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3)\}.$$

(i) [1 punto] Calcolare il valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la funzione $p : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$,

$$p(i,j) = \begin{cases} \frac{\alpha}{i+j}, & (i,j) \in A \\ 0, & (i,j) \in \mathbb{R}^2 \setminus A, \end{cases} \tag{1}$$

è una densità di probabilità.

(ii) [1 punto] Siano X e Y sono due variabili aleatorie di densità discreta congiunta p, come assegnata al punto (i) di questo esercizio. Calcolare

$$E[X + Y].$$

(iii) (**Facoltativo** [0,5 punti]) Calcolare le densità marginali p_X e p_Y della variabile aleatoria 2−dimensionale (X,Y) definita al punto (ii). Calcolare $E[X]$ e $E[Y]$.

Svolgimento.
Affinché p sia una densità di probabilità occorre che

$$\sum_{(i,j)\in A} p(i,j) = 1,$$

quindi

$$\sum_{(i,j)\in A} \frac{\alpha}{i+j} = \alpha(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6})$$
$$= \alpha(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{1}{3}) = \alpha\frac{19}{10} = 1.$$

Pertanto $\alpha = \frac{10}{19}$.
Calcoliamo ora $E[X+Y]$. Conoscendo la densità congiunta abbiamo:

$$E[X+Y] = \sum_{(i,j)\in A}(x_i+y_j)p(i,j) = \alpha \sum_{(i,j)\in A}(x_i+y_j)\frac{1}{i+j} = \alpha \sum_{(i,j)\in A} 1 = 7\alpha = \frac{70}{19}.$$

(Facoltativo) La densità marginale di X vale per $\bar{i} = 1,2,3$

$$p_X(\bar{i}) = \sum_{(\bar{i},j)\in A} \frac{\alpha}{\bar{i}+j} = \alpha \sum_{(\bar{i},j)\in A} \frac{1}{\bar{i}+j},$$

in particolare

$$p_X(1) = \alpha(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) = \alpha\frac{5}{6} = \frac{25}{57},$$
$$p_X(2) = \alpha(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}) = \alpha\frac{7}{10} = \frac{7}{19},$$
$$p_X(3) = \alpha(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}) = \alpha\frac{11}{30} = \frac{11}{57},$$

mentre per ogni $\bar{i} \in \mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}$ la densità è nulla, cioè $p_X(\bar{i}) = 0$.
Analogamente la densità marginale di Y vale per $\bar{j} = 1,2,3,4$

$$p_Y(\bar{j}) = \sum_{(i,\bar{j})\in A} \frac{\alpha}{i+\bar{j}} = \alpha \sum_{(i,\bar{j})\in A} \frac{1}{i+\bar{j}},$$

in particolare

$$p_Y(1) = \alpha \sum_{(i,1)\in A} \frac{1}{i+1} = \alpha(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = \alpha\frac{5}{6} = \frac{25}{57},$$

$$p_Y(2) = \alpha \sum_{(i,2)\in A} \frac{1}{i+2} = \alpha\frac{8}{15} = \frac{16}{57},$$

$$p_Y(3) = \alpha \sum_{(i,3)\in A} \frac{1}{i+3} = \alpha\frac{11}{30} = \frac{11}{57},$$

$$p_Y(4) = \alpha \sum_{(i,3)\in A} \frac{1}{i+4} = \alpha\frac{1}{6} = \frac{5}{57},$$

mentre per ogni $\bar{j} \in \mathbb{R} \setminus \{1,2,3,4\}$ la densità è nulla, cioè $p_Y(\bar{j}) = 0$.

Ora possiamo calcolare

$$E[X] = \sum_{i=1}^{3} ip_X(i) = \alpha\frac{5}{6} + \alpha\frac{42}{30} + \alpha\frac{33}{30} = \alpha\frac{10}{3} = \frac{100}{57}$$

e

$$E[X] = \sum_{j=1}^{4} jp_Y(j) = \alpha\frac{5}{6} + \alpha\frac{16}{15} + \alpha\frac{33}{30} + \alpha\frac{4}{6} = \alpha\frac{11}{3} = \frac{110}{57}.$$

Pertanto possiamo verificare che:

$$E[X] + E[Y] = \frac{100}{57} + \frac{110}{57} = \frac{210}{57} = \frac{70}{19} = E[X+Y]$$