

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA E ELEMENTI DI  
CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (Seconda prova parziale della  
parte di Elementi di Calcolo delle Probabilità) del 11/06/2013

COGNOME....., NOME....., numero di matricola .....  
Riconsegnare il testo. Rispondere alle domande, con esaurienti motivazioni, nel riquadro sottostante  
e/o nel foglio protocollo allegato.

---

(1) [2 punti] Siano  $X$  e  $Y$  due variabili aleatorie di densità congiunta  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}, & (x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\} \\ 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}. \end{cases} \quad (1)$$

Calcolare  $P(|Y| \leq 4X)$ .

---

(2) Esercizio (**Facoltativo, non utile per l'ammissione**) [0,5 punti] Il lancio di una moneta dà con probabilità  $\frac{1}{5}$  testa e con probabilità  $\frac{4}{5}$  croce. Se la moneta viene lanciata 80 volte, stimare, utilizzando la densità Gaussiana, la probabilità che testa esca più di 74 volte (è sufficiente indicare l'argomento in cui calcolare  $\Phi$  senza produrre un valore numerico della  $\Phi$  calcolata in tale valore).

---

(3) [1 punto] Scrivere la densità della variabile aleatoria reale  $X + Y$  nota la densità congiunta  $f$  di  $X$  e  $Y$ .

---

(4) [1 punto] Scrivere il Teorema sulla disuguaglianza di Chebyshev.

---

(5) [2 punti] Sia assegnato

$$A = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (2, 5)\}.$$

Dopo aver calcolato il valore di  $\alpha \in \mathbb{R}$  per cui la funzione  $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ ,

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{\alpha}{i \cdot j}, & (x, y) \in A \\ 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A, \end{cases}$$

sia una densità, calcolare le densità marginali  $p_X$ ,  $p_Y$ , le speranze matematiche  $E[X]$ ,  $E[Y]$ , la varianza  $\text{Var}(X)$ , la covarianza  $\text{Cov}(X, Y)$  e la retta di regressione.

---

(6) [2 punti] Sia  $X$  una variabile aleatoria reale di densità normale  $N(0, 1)$ . Determinare la densità della variabile aleatoria  $5X^4$ .

---

(7) Sia  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = ce^{-4x^2 - 9y^2},$$

con  $c$  numero reale tale che  $f$  sia una densità congiunta delle due variabili aleatorie  $X$  e  $Y$ . (i) [1 punto] Scrivere, senza calcolare esplicitamente  $c$ , le densità marginali  $p_X$  e  $p_Y$  e calcolare le speranze matematiche  $E[X]$  e  $E[Y]$ . (ii) **(Facoltativo, non utile per l'ammissione)** [0,5 punti] Calcolare il valore  $c$ .

---

(8) [1 punto] Scrivere l'enunciato della legge sui grandi numeri.

---

(9) [1 punto] Scrive l'enunciato del teorema del limite centrale.