Teorema

Siano X, Y v.a. [illegible] densità congiunta f

Siano f_X e f_Y rispettivamente le densità marginali,

(a) Se $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ allora per ogni $a_1, a_2, b_1, b_2 \in$

se $a_1 \leq b_1$, $a_2 < b_2$

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{a_1}^{b_1} f_X(x)\,dx \cdot \int_{a_2}^{b_2} f_Y(y)\,dy$$

e X e Y sono indipendenti

(b) Se per ogni $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{a_1}^{b_1} f_X(x)\,dx \cdot \int_{a_2}^{b_2} f_Y(y)\,dy$$

(cioè X e Y sono indipendenti)

allora $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus E$

e $|E| = 0$.

<u>Osservazione</u> se vale $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ allora X e Y sono indipendenti perché (a) significa

$$P(X \in [a_1, b_1], Y \in [a_2, b_2]) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} f_X(x)\,dx \int_{a_2}^{b_2} f_Y(y)\,dy$$

$$= P(X \in [a_1, b_1])\, P(Y \in [a_2, b_2]).$$

<u>Dim. di (a)</u> $P(X \in [a_1,b_1], Y \in [a_2,b_2]) = P(X \in [a_1,b_1])\, P(Y \in [a_2,b_2])$

cioè

$$\iint_{[a_1,b_1] \times [a_2,b_2]} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy \right) dx \cdot \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx \right) dy$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} f_X(x)\,dx \cdot \int_{a_2}^{b_2} f_Y(y)\,dy$$

X, Y v.a. $\quad f$ densità congiunta

$$P(X+Y\le t) = \int_{\{x+y\le t\}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\int_{-\infty}^{t-x} f(x,y)\,dy \right)$$

Se pongo $z = y+x$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\int_{-\infty}^{t} f(x, z-x)\,dz \right) dx = \int_{-\infty}^{t} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\,dx \right) dz$$

$$\boxed{z \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\,dx}$$

Siano X, Y v.a. Diremo che X e Y sono indipendenti se per ogni $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, ($a_1, a_2$ eventualmente $-\infty$) $a_1 \le b_1$, $a_2 \le b_2$ si ha che

$$P(a_1 \le X \le b_1,\ a_2 \le Y \le b_2) = P(a_1 \le X \le b_1)\, P(a_2 \le Y \le b_2).$$

Quindi se $a_1, a_2 = -\infty$ $\quad P(X \in]-\infty, b_1],\ Y \in]-\infty, b_2])$

$$= P(-\infty < X \le b_1) \cdot P(-\infty < Y \le b_2)$$

$$= F_X(b_1) \cdot F_Y(b_2)$$

Infatti $\quad P(a \le X \le b) = P((X,Y) \in \{(u,v) : a \le u \le b,\ v \in \mathbb{R}\})$

f densità congiunta di X e Y

$$= \int_{\{(u,v):\ a \le u \le b,\ v \in \mathbb{R}\}} f(u,v)\,du\,dv = \int_a^b \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,dv \right) du$$

densità marginale

$$= \int_a^b f_X(u)\,du$$

Criterio di indipendenza delle v.a.

Siano X e Y v.a. di densità congiunta f della forma $f_1(x)\cdot f_2(y) = f(x,y)$. Allora X e Y sono indipendenti

Dim.

$$1 = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\,dx\right) f_2(y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\,dx\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y)\,dy$$

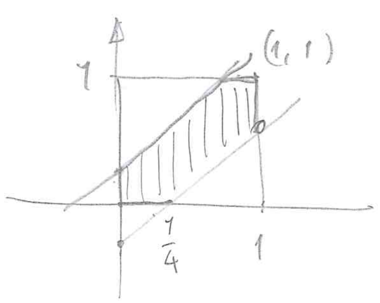
Inoltre $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(y)\,dy = f_1(x)\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y)\,dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = f_2(y)\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\,dx$$. Quindi

$$f_X(x)\cdot f_Y(y) = f_1(x) f_2(y)\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y)\,dy\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\,dx = f_1(x) f_2(y) = f(x,y)$$

Due punti vengono scelti nell'intervallo $[0,1]$ indipendenti e con distrib uniforme. Calcolare la prob che differiscano meno di $\frac{1}{4}$

$$P\left(|X-Y| \le \frac{1}{4}\right) = \int_{\{|x-y|\le\frac{1}{4}\}} \chi_{[0,1]\times[0,1]}(x,y)\,dx\,dy = 1 - 2\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$



$x - y = \frac{1}{4}$

$y = x - \frac{1}{4}$

$-\frac{1}{4} \le x - y \le \frac{1}{4}$

Si dimostra inoltre che se X e Y sono indipendenti e U, V sono altre v.a aventi la stessa densità congiunta allora anche U e V sono indipendenti.

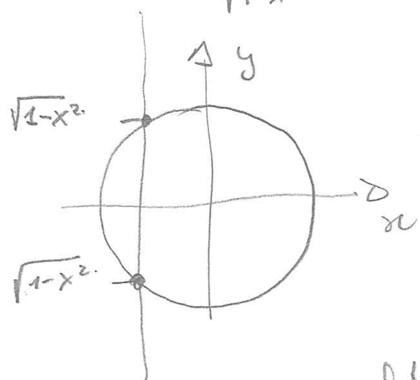
Sia $Z = (X,Y)$ v.a. su cerchio di raggio 1. Supponiamo che

$$f_Z(x,y) = \frac{1}{mis(B(0,1))}\chi_{B(0,1)}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & se\ x^2+y^2\le 1 \\ 0, & altrimenti \end{cases}$$

Inoltre se $-1\le x\le 1$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\chi_{B(0,1)}(x,y)\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}.$$

altrimenti $f_X(x)=0$



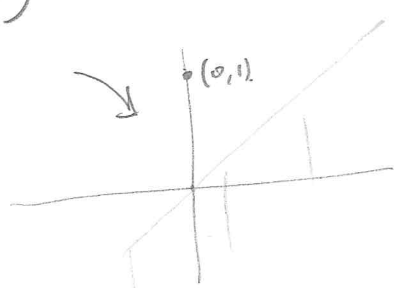
$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}$$ se $-1\le y\le 1$, 0 altrimenti

---

X, Y v.a indipendenti hanno tempi di rottura esponenziali di parametri λ e μ.

$$P(X<Y) = \iint_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x<y\}} f(x,y)\,dxdy$$

$$= \iint_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x<y\}} f_X(x) f_Y(y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{y}^{+\infty} \lambda\mu\, e^{-\lambda x} e^{-\mu y}\,dy$$



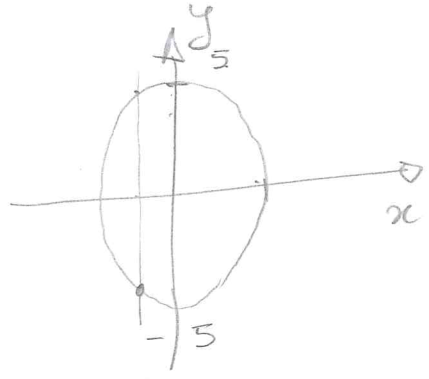
Siano X, Y v.a. la cui densità congiunta è la densità uniforme su $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}\le 1$. Calcolare le densità marginali e verificare se X e Y sono indipendenti

$$f(x,y)=\chi_{\left\{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}\le 1\right\}}\cdot\frac{1}{\left|\left\{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}\le 1\right\}\right|}=\frac{1}{3\cdot 5\cdot \pi}\chi_{\left\{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}\le 1\right\}}$$

se $-3\le x\le 3$

$$f_X(x)=\frac{1}{15\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\chi_{\left\{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}\le 1\right\}}(x,y)\,dy=$$

$$=\frac{1}{15\pi}\int_{-\sqrt{25-\frac{25}{9}x^2}}^{+\sqrt{25-\frac{25}{9}x^2}} y\,dy=\frac{2}{15\pi}\sqrt{25-\frac{25}{9}x^2}$$



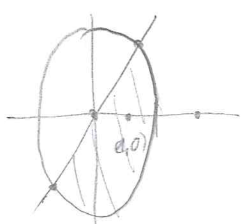
$$\frac{y^2}{25}=1-\frac{x^2}{9}$$

mentre $-5\le y\le 5$

$$f_Y(y)=\frac{1}{15\pi}\int_{-\sqrt{9-\frac{9}{25}y^2}}^{\sqrt{9-\frac{9}{25}y^2}} x\,dx=\frac{2}{15\pi}\sqrt{9-\frac{9}{25}y^2}$$

Quindi $f_X(x)\,f_Y(y)\ne f(x,y)=\frac{1}{15\pi}\chi_{\left\{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}\le 1\right\}}$

Calcolare $P(X>Y)=\frac{1}{15\pi}\int_{\mathbb{R}^2\cap\{x>y\}}\chi_{\left\{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}\le 1\right\}}=\frac{1}{15\pi}\iint_{\left\{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}\le 1,\ x>y\right\}}dx\,dy$



$$=\frac{1}{15\pi}\iint_{\left\{0\le\rho\le 1,\ \arctan\frac{3}{5}-\pi<\theta<\arctan\frac{3}{5}\right\}}15\rho\,d\rho\,d\theta=\frac{15\pi}{15\pi}\int_0^1\rho\,d\rho=\frac{1}{2}$$

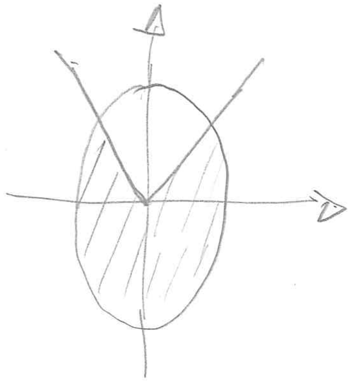
$\cos\theta>\frac{5}{3}\sin\theta$; $\frac{x}{3}=\rho\cos\theta$ $\rightarrow \rho<1$

$3\cos\theta>5\sin\theta$ $\frac{y}{5}=\rho\sin\theta$

$\frac{3}{5}>\operatorname{tg}\theta$ 3ρ

Calcolare $P(|X|>Y) = \frac{1}{15\pi} \int_{-\pi-\arctan\frac{3}{5}}^{\arctan\frac{3}{5}} \int_0^1 15\, \rho\, d\rho\, d\theta = \left(\frac{2\arctan\frac{3}{5}+\pi}{\cancel{15\pi}}\right)\frac{\cancel{15}}{2}$

$= \frac{1}{2} + \frac{\arctan\frac{3}{5}}{\pi}$



Calcolare $P(|X|<Y) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\arctan\frac{3}{5}}{\pi}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\arctan\frac{3}{5}}{\pi}$

<u>Dim. di Chebyshev</u>

Sia X v.a. (discreta) di speranza mat. μ e varianza σ. Allora per ogni $\eta>0$

$$\underline{P}(|X-\mu|>\eta) \leq \frac{Var(X)}{\eta^2}$$

<u>Dim.</u>

Sia $Y = \eta^2 \chi_{\{|X-\mu|>\eta\}}$. Allora ovviamente

$(X-\mu)^2 = |X-\mu|^2 \geq Y$, quindi $E(X-\mu)^2 \geq E[Y]$

da cui $Var(X) \geq E[Y] = \sum_{|x_i-\mu|>\eta} \eta^2 p(x_i) = \eta^2 P(|X-\mu|>\eta)$

cioè $\underline{P}(|X-\mu|>\eta) \leq \frac{Var(X)}{\eta^2}$

Th.

Siano X e Y v.a. se $X \geq Y$ allora $E[X] \geq E[Y]$

e $E[X] = E[Y] \Leftrightarrow P(X=Y) = 1$

Dim.

Sia $Z = X - Y \geq 0$.

$$E[Z] = \sum_{z_i \in Z(\Omega)} z_i P(Z = z_i) \geq 0.$$

Se $E[Z] = 0 \Rightarrow z_i = 0$ per ogni $z_i \in Z(\Omega)$

Cioè $P(X=Y) = P(Z=0) = P(\Omega) = 1$

Th.

$|E[X]| \leq E[|X|]$

$X \leq |X| \to E[X] \leq E[|X|]$

$-X \leq |X| \to E[-X] \leq E[|X|]$

$\to |E[X]| \leq E[|X|]$

<u>Def.</u> $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ v.a. in $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ converge in probabilità a X se per ogni $\eta > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - X| > \eta) = 0.$$ In tal caso scriveremo

$$X_n \xrightarrow{P} X$$

<u>Teorema</u> (Legge dei grandi numeri)

Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ v.a. indipendenti ed aventi la stessa legge. Supponiamo inoltre che abbiano la stessa speranza matematica μ e la stessa varianza finita σ^2. Allora posto

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

allora per ogni $\eta > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} P(|\bar{X} - \mu| > \eta) = 0$$

cioè $\bar{X} \xrightarrow{P} \mu$, $n \to +\infty$

<u>Dim.</u>

indip. di X_i

$$P(|\bar{X} - \mu| > \eta) \leq \frac{Var(\bar{X})}{\eta^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Var\left(\frac{1}{n} X_i\right)}{\eta^2}$$

$$= \frac{1}{n^2}\,\frac{\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)}{\eta^2} = \frac{\sigma^2}{n\eta^2} \xrightarrow[n\to\infty]{}$$

perché $E[\bar{X}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \mu.$