Cenni di calcolo combinatorio

Siano A e B insiemi di cardinalità finita; $\#A=k$, $\#B=n$.

Poniamo:

(i) $F(A,B)=\{f: A \to B \mid f$ è una funzione$\}$

(ii) Se $k \le n$ $D(A,B)=\{f: A \to B \mid f$ è iniettiva$\}$

(iii) Se $k \le n$ $C_k(B)=\{A \mid A \subseteq B, \#A=k\}$

(IV) Se $k=n$ $D(B,B)=\{f: B \to B$ f iniettiva$\}$.

(V) Se $H_1,\dots,H_m$ sono insiemi $H_1 \times H_2 \times \dots \times H_m$ indica il loro prodotto cartesiano

<u>Teorema</u>

Siano A e B insiemi di cardinalità finita; $\#A=k$, $\#B=n$

(a) $\#F(A,B)=(\#B)^{\#A}=n^k$

(b) Se $k \le n$ $\#D(A,B)=\dfrac{(\#B)!}{(\#B-\#A)!}=\dfrac{n!}{(n-k)!}$

(c) Se $k \le n$ $\#C_k(B)=\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}=\binom{n}{k}$

(d) Se $k=n$ $\#D(B,B)=n!$

(e) Se $H_1,\dots,H_m$ sono insiemi di cardinalità finita rispettivamente

$\#H_1=i_1$, $\#H_2=i_2,\dots,\#H_m=i_m$ allora

$$\#(H_1 \times H_2 \times \dots \times H_m)=i_1 \cdot i_2 \cdot i_3 \cdot \dots \cdot i_m.$$

<u>N.B.1</u> se A e B sono di cardinalità finita e $\#A=k$, $\#B=n$ spesso si scrive semplicemente $F_{n,k}$, $D_{n,k}$, $C_{n,k}$, D_{nn} dando per scontato che per $D_{n,k}$ e $C_{n,k}$, k si intende minore o uguale di n e $A=\{1,\dots,k\}$ e $B=\{1,2,\dots,n\}$. Inoltre:

$\#F(A,B)=\#F_{n,k}=n^k$ (con $\#A=k$ e $\#B=n$);

$\#D_{n,k}=\dfrac{n!}{(n-k)!}$; $\#C_{n,k}=\binom{n}{k}$; $\#D_{nn}=n!$.

N.B. 2 La lettera D in $D_{n,k}$, ricorda la parola "disposizione".
Infatti $D_{n,k}$ può essere anche interpretato come l'insieme delle diverse disposizioni di k elementi di un insieme di n elementi.
Per esempio se $B=\{a,b,c\}$ allora $\#D_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = 3! = 6$

$1 \to a,\ 2 \to b$; $1 \to b,\ 2 \to a$; $1 \to a,\ 2 \to c$; $1 \to c,\ 2 \to a$; $1 \to b,\ 2 \to c$; $1 \to c,\ 2 \to b$.

oppure

$\# D_{3,1} = \frac{3!}{(3-1)!} = \frac{3!}{2!} = 3$

$1 \to a$; $1 \to b$; $1 \to c$.

Consideriamo una password di otto lettere dell'alfabeto inglese.
Le lettere dell'alfabeto inglese sono 26. Quindi, se vogliamo una password di 8 lettere tutte distinte scelte su 26 in cui l'ordine è importante (scrivere FRANCO non è la stessa cosa di scrivere CONFRA) allora cerchiamo le disposizioni di 8 lettere su 26. Pertanto

$$\#D_{26,8} = \frac{26!}{(26-8)!} = \frac{26!}{18!} = \frac{\cancel{18!}\cdot 19\cdot 20\cdot 21\cdot 22\cdot 23\cdot 24\cdot 25\cdot 26}{\cancel{18!}}$$

$$= 19\cdot 20\cdot 21\cdot 22\cdot 23\cdot 24\cdot 25\cdot 26.$$

Pertanto abbiamo a disposizione $19\cdot 20\cdot 21\cdot 22\cdot 23\cdot 24\cdot 25\cdot 26$ possibilità

La probabilità di indovinare una password di 8 lettere distinte è

$$\frac{18!}{26!} = \frac{1}{19\cdot 20\cdot 21\cdot 22\cdot 23\cdot 24\cdot 25\cdot 26}.$$

Il numero di password che possiamo costruire, ammettendo anche ripetizioni, è 26^8. Quindi la probabilità di indovinare questo tipo di password è $\frac{1}{26^8}$.

Se la password fosse di otto lettere distinte che possono essere inserite in un ordine qualunque allora avremo $\# C_{26,8} = \binom{26}{8} = \frac{26!}{8!\,18!}$ possibilità.

Qual è la cardinalità dell'insieme delle parti?

$\mathcal{P}(\Omega) = \{A \subseteq \Omega \mid A \text{ è sottoinsieme di } \Omega\}$

<u>esempio</u> $\Omega = \{a, b, c\}$

$\mathcal{P}(\Omega) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$.

Utilizziamo il calcolo combinatorio; ogni sottoinsieme $A \subseteq B$ ha un complementare in Ω, per cui A e $A^c = \Omega \setminus A$ costituiscono una partizione di Ω, cioè $\{A, A^c\}$ è t.c. (i) $A \cup A^c = \Omega$ (ii) $A \cap A^c = \phi$. Allora per ogni A è definita la funzione caratteristica $\chi_A : \Omega \longrightarrow \{0,1\}$ per cui $\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in A \\ 0 & \text{se } \omega \notin A. \end{cases}$

Pertanto, per ogni $A \subseteq \Omega$ esiste una ed una sola funzione χ_A e date due funzioni χ_A, χ_B generate da due sottoinsiemi diversi di Ω dovranno essere diverse anche le due funzioni, cioè $\chi_A \neq \chi_B$ (cioè $A = B \Longleftrightarrow \chi_A = \chi_B$).

Quindi $\#F(\Omega, \{0,1\}) = \#\mathcal{P}(\Omega)$. Allora $\#\mathcal{P}(\Omega) = 2^{\#\Omega}$.

Calcolare quante disposizioni di 4 numeri ci sono in 90 numeri:

$$D_{90,4} = \frac{90!}{(90-4)!} = \frac{90!}{86!} = 87 \cdot 88 \cdot 89 \cdot 90.$$

Quindi la probabilità di estrarre una sequenza di 4 numeri fra 90 è $\dfrac{1}{D_{90,4}} = \dfrac{1}{87 \cdot 88 \cdot 89 \cdot 90}$.

Si poteva anche procedere ragionando come segue. La probabilità di estrarre un prefissato numero da 90 è $\frac{1}{90}$ (supponendo una distribuzione uniforme). A questo punto lo spazio di probabilità è cambiato. Infatti sono rimasti 89 numeri tra cui selezionare il secondo numero prefissato, per cui avremo $\frac{1}{89}$ di probabilità di estrarre il secondo numero prefissato. Cambia ulteriormente lo spazio di prob. per cui avremo $\frac{1}{88}$ possibilità di estrarre il terzo numero prefissato e infine $\frac{1}{87}$ il quarto. A questo punto usando la nozione di prob. condizionale si ha:

$$P((IV) \mid (I, II, III)) = \frac{P((IV) \cap (I, II, III))}{P((I, II, III))} = \frac{P((I, II, III, IV))}{P(I, II, III)}$$

cioè

$$P((I, II, III, IV)) = P(I, II, III) \cdot P((IV) \mid (I, II, III))$$

$$P((I, II, III)) \cdot P((IV) \mid (I, II, III)) =$$

$$= P(I, II) \cdot P(III \mid (I, II)) \cdot P((IV) \mid (I, II, III))$$

$$= P((I)) \, P((II) \mid (I)) \cdot P(III \mid (I, II)) \cdot P((IV) \mid (I, II, III))$$

$$= \frac{1}{90} \cdot \frac{1}{89} \cdot \frac{1}{88} \cdot \frac{1}{87}.$$

Esaminiamo due esempi interessanti

Sia assegnata una v.a. discreta in $\{1,2,3,4,5,6\}^2$ per cui

$$p_1(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{36}, & (x,y) \in \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} \\ 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{1,2,3,4,5,6\}^2. \end{cases}$$

Sia inoltre p_2 un'altra densità di probabilità

$$p_2(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{30}, & (x,y) \in \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} \setminus \{(k,k) : k = 1, \dots, 6\} \\ 0 & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \left(\{1,2,3,4,5,6\}^2 \setminus \{(k,k) : k = 1, \dots, 6\}\right) \end{cases}$$

La densità congiunta p_1 può essere associata all'estrazione di due palline numerate da 1 a 6. L'estrazione avviene sempre tra le 6 palline, cioè c'è reimbussolamento

La densità congiunta p_2 invece, può essere associata all'estrazione di due palline sempre 6, ma con una modalità diversa. Dopo l'estrazione della prima pallina non c'è rimpiazzo, cioè la pallina non è più disponibile per la seconda estrazione

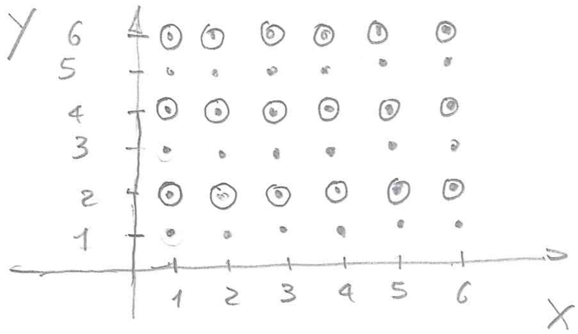
$\boxed{\text{Calcolare} \quad P(X \in \{1,2,3,4,5,6\}, Y \in \{2,4,6\})}$ utilizzando le due diverse densità di probabilità

Ciò significa calcolare la probabilità che il secondo numero sia pari nel caso in cui (primo caso) vi sia reimbussolamento sia nel caso in cui non vi sia reimbussolamento.

Caso con reimbussolamento, primo metodo

$$P(X \in \{1,\dots,6\}, Y \in \{2,4,6\}) = \sum_{(x,y)\in\{1,2,3,4,5,6\}\times\{2,4,6\}} p_1(x,y) = \frac{1}{36}\#\{(n,k) : n \in \{1\dots6\}, k \in \{2,4,6\}\}$$

$$= \frac{1}{36}\cdot 18 = \frac{1}{2}$$



Secondo metodo

$$P(X \in \{1,2,3,4,5,6\}, Y \in \{2,4,6\}) = P(\{X \in \{1,2,3,4,5,6\}, Y \in \{2,4,6\}\} \cap A) + P(\{X \in \{1\dots6\}, Y \in \{2,4,6\}\} \cap B)$$

dove $A = \{X \in \{1,3,5\}, Y \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$, $B = \{X \in \{2,4,6\}, Y \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$

$$= P(\{X \in \{1,2,3,4,5,6\}, Y \in \{2,4,6\}\} \mid A) \cdot P(A) + P(\{X \in \{1,2,3,4,5,6\}, Y \in \{2,4,6\}\} \mid B)\, P(B)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2},$$

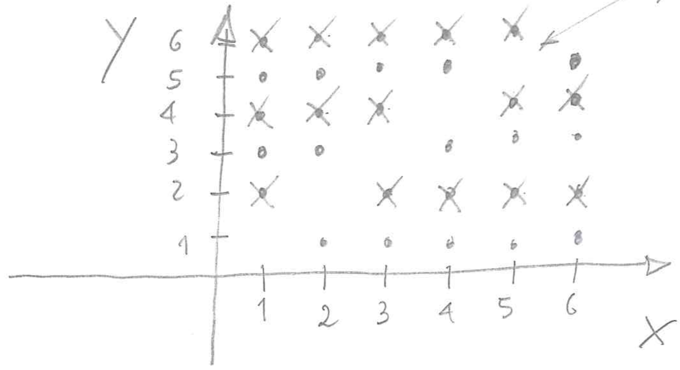
si ricordi che $P(X=m, Y=n \mid \{X \in \{1,3,5\}, Y \in \{1,2,3,4,5,6\}\}) = \dfrac{P(\{X=m, Y=n\} \cap A)}{P(A)}$

Nel secondo caso invece (senza rimpiazzo)

$$P\left(X\in\{1,2,3,4,5,6\}, Y\in\{2,4,6\}\right) = \sum_{(x,y)\in\{1,2,3,4,5,6\}} p_2(x,y) = \frac{1}{30}\cdot \#\{(m,k) : m\in\{1,2,3,4,5,6\},\ k\in\{2,4,6\},\ m\neq k\}$$

$$= \frac{1}{30}\cdot\frac{1}{15} = \frac{1}{2}$$

manca la diagonale



Altrimenti

$$P(X\in\{1,2,3,4,5,6\}, Y\in\{2,4,6\}) = P(\{X\in\{1,2,3,4,5,6\}, Y\in\{2,4,6\}\}\cap A) + P(\{X\in\{1,2,3,4,5,6\}, Y\in\{2,4,6\}\}\cap B)$$

$$= P(\{X\in\{1,2,3,4,5,6\}, Y\in\{2,4,6\}\}\mid A)\cdot P(A) + P(\{X\in\{1,2,3,4,5,6\}, Y\in\{2,4,6\}\}\mid B)\, P(B)$$

$$= \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{6} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{6} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2},$$ si osservi infatti nel secondo caso

$$P(X=m, Y=m \mid \{X\in\{1,3,5\}, Y\in\{1,2,3,4,5,6\}\}) = \frac{P(\{X=m, Y=m\}\cap\{X\in\{1,3,5\}, Y\in\{1,\dots,6\}\})}{P(X\in\{1,3,5\}, Y\in\{1,2,3,4,5,6\})}$$

In entrambi i casi la probabilità di estrarre una pallina con numero pari come seconda estratta è sempre $\frac{1}{2}$ (sia con rimpiazzo che senza rimpiazzo). Tuttavia con la seconda densità di probabilità gli eventi $\{X\in\{1,2,3,4,5,6\}, Y\in\{2,4,6\}\}$ e $\{X\in\{1,3,5\}, Y\in\{1,2,3,4,5,6\}\}$ non sono indipendenti perché

$$P\left(\{X\in\{1,2,3,4,5,6\}, Y\in\{2,4,6\}\}\mid\{X\in\{1,3,5\}, Y\in\{1,2,3,4,5,6\}\}\right) = \frac{3}{5} \neq \frac{3}{10}$$

e $\frac{3}{10} = P(\{X\in\{1,2,3,4,5,6\}, Y\in\{2,4,6\}\})$.

Più in generale se calcoliamo le densità marginali nei due casi abbiamo

$$p_{1X}(m) = \sum_{(m,n)\in\{1,\dots,6\}^2} p_1(m,n) = \frac{1}{36}\sum_{(m,n)\in\{1,\dots,6\}^2} 1 = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$p_{1Y}(n) = \sum_{(m,n)\in\{1,\dots,6\}^2} p_1(m,n) = \frac{1}{36}\sum_{(m,n)\in\{1,\dots,6\}^2} 1 = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Quindi $p_{1X}(m)\cdot p_{1Y}(n) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36} = p_1(m,n)$

$\forall (n,m)\in\{1,\dots,6\}^2$ e $p_{1X}(x)\cdot p_{1Y}(y) = 0 = p_1(x,y)$ se $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{1,\dots,6\}^2$.

<u>Invece</u> per $(m,n)\in\{1,\dots,6\}^2\setminus\{(n,n) : n=1,\dots,6\}$

$$p_{2X}(m) = \sum_{(m,n)\in\{1,\dots,6\}^2\setminus\{(n,n)\,:\,n=1,\dots,6\}} \frac{1}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

$$p_{2Y}(n) = \sum_{(m,n)\in\{1,\dots,6\}^2\setminus\{(n,n)\,:\,n=1,\dots,6\}} \frac{1}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

Mentre

$$\frac{1}{36} = p_{2X}(m)\cdot p_{2Y}(n) \neq p_2(m,n) = \frac{1}{30}$$

Cioè nel secondo modello X e Y non sono indipendendenti, mentre nel primo lo sono.

Il binomio di Newton

per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (se $a+b=0$ e $n=0$ però non ha senso)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

dove $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ è chiamato coefficiente binomiale

<u>Dim.</u> Se $n=0$ e $n=1$ vale banalmente. Supponiamo che sia vera per $n=J$, (ipotesi induttiva).

Allora

$$(a+b)^{J+1} = (a+b)(a+b)^J = (a+b)\sum_{k=0}^{J} \binom{J}{k} a^k b^{J-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{J} \binom{J}{k} \underset{k+1=m}{a^{k+1}} b^{J-k} + \sum_{k=0}^{J} \binom{J}{k} a^k b^{J-k+1}$$

$$= \sum_{m=1}^{J+1} \binom{J}{m-1} a^m b^{J-m+1} + \sum_{k=0}^{J} \binom{J}{k} a^k b^{J-k+1}$$

$$= \binom{J}{J} a^{J+1} + \sum_{m=1}^{J} \left(\binom{J}{m-1} + \binom{J}{m} \right) a^m b^{J-m+1} + \binom{J}{0} b^{J+1}$$

$$= a^{J+1} + \sum_{m=1}^{J} \frac{mJ! + J!(J-m+1)}{m!(J-m+1)!} a^m b^{J-m+1} + b^{J+1}$$

$$= a^{J+1} + \sum_{m=1}^{J} \frac{(J+1)!}{m!(J+1-m)!} a^m b^{J+1-m} + b^{J+1}$$

$$= a^{J+1} + \sum_{m=1}^{J} \binom{J+1}{m} a^m b^{J+1-m} + b^{J+1} = \sum_{m=0}^{J+1} \binom{J+1}{m} a^m b^{J+1-m}$$

$\boxtimes$

Applicazione se $p \in (0,1)$. Allora

$$1^n = (\underbrace{p}_{a} + \underbrace{1-p}_{b})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Binomio di Newton

Quindi se per ogni n fissato e per ogni p fissato definiamo

$$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, & x \in \{0,1,2,3,\dots,n\} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1,2,3,\dots,n\} \end{cases}$$

allora p è una densità di probabilità, perché per ogni $x \in \mathbb{R}$ $p(x) \geq 0$, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1,2,3,\dots,n\}$ $p(x) = 0$

e $$\sum_{x \in \{0,1,2,3,\dots,n\}} p(x) = \sum_{k=0}^{n} p(k) = \sum_{n=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1$$

binomio di Newton.

Questa densità di probabilità si chiama densità di Bernoulli di ordine 1 e parametro p. In breve $B(n,p)$.

Esempio modello.

Sia $\Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^n : \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ e $\omega_i \in \{0,1\}, i = 1,\dots,n\}$

supponiamo di dotare Ω della distribuzione di probabilità uniforme. Allora $P : \mathcal{Q} \longrightarrow [0,1]$ deve essere t.c.

$P(\omega) = \frac{1}{\#\Omega}$ per ogni $\omega \in \Omega$, dove $\mathcal{Q}$ è una σ-algebra su Ω. Definiamo la seguente v.a. $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$. Questa variabile aleatoria conta quanti 1 sono presenti nel vettore ω

Conta cioè i "successi". Si pensi al lancio di una moneta n volte. L'uscita di testa corrisponde a segnare 1, l'uscita di croce corrisponde a segnare 0.

Calcoliamo $\mathbb{P}(X=k)$ per $k=0,1,2,\dots,n$; stiamo cioè calcolando la densità di probabilità di X nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ con densità uniforme.

Allora

$$\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{\{\omega:\ \sum_{i=1}^{n}\omega_i = k\}} \{\omega\}\Big) = \sum_{\{\omega:\ \sum_{i=1}^{n}\omega_i=k\}} \mathbb{P}(\{\omega\})$$

sono tutti eventi elementari (disgiunti)

$$= \sum_{\{\omega:\ \sum_{i=1}^{n}\omega_i=k\}} \frac{1}{\#\Omega} = \frac{1}{\#\Omega}\ \#\Big\{\omega\in\Omega:\ \sum_{i=1}^{n}\omega_i=k\Big\}$$

$\#\Omega = 2^n$ perché significa contare quante funzioni ci sono da $\{1,\dots,n\}$ a $\{0,1\}$ $\left(\#\Omega = (\#\{0,1\})^{\#\{1,\dots,n\}} = 2^n\right)$

Mentre $\#\{\omega\in\Omega:\ \sum_{i=1}^{n}\omega_i=k\}$ consiste nel determinare quante n-uple distinte ci sono aventi k coordinate uguali a 1.
Cioè quante sono le combinazioni di k elementi fra n elementi.

Infatti se calcoliamo le funzioni iniettive da un insieme di k elementi a uno di n elementi troviamo la cardinalità $\frac{n!}{(n-k)!}$, ma poiché l'immagine di tali funzioni è una k-pla di 1 dobbiamo dividere per $k!$ ottenendo che

$$\#\Big\{\omega\in\Omega:\ \sum_{i=1}^{n}\omega_i=k\Big\} = \binom{n}{k}$$

Pertanto $\quad P(X=k) = \dfrac{\binom{n}{k}}{2^n} = \binom{n}{k}\cdot\dfrac{1}{2^n} = \binom{n}{k}\dfrac{1}{2^k}\cdot\dfrac{1}{2^{n-k}}$

Ragioniamo ora in modo diverso. Supponiamo che su $\Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^n : \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ e $\omega_i \in \{0,1\},\ i = 1 \dots, n\}$ sia assegnata una distribuzione di probabilità non uniforme per cui per ogni $\omega \in \Omega$ $\quad P(\{\omega\}) = p^k(1-p)^{n-k}$ dove $k = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$ (k cioè indica quanti 1 (quanti successi) sono presenti nella n-pla ω). Si verifica immediatamente che P è una funzione di probabilità. Infatti

$$P\Big(\bigcup_{\omega\in\Omega}\{\omega\}\Big) = \sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\}) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\{\sum_{j=1}^{n}\omega_j = k\}} P(\{\omega\})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\{\sum_{j=1}^{n}\omega_j = k\}} p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} p^k(1-p)^{n-k}\,\#\Big\{\omega : \sum_{j=1}^{n}\omega_j = k\Big\}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Questo ultimo spazio di probabilità modellizza il lancio di una moneta per n volte supponendo che la moneta sia non equilibrata in modo tale che l'uscita di testa (1) avvenga con probabilità p ad ogni lancio e che tale evento non condizioni, l'evento successivo.