#1 Poiché nelle due sestine giocate ci sono tre numeri uguali, rispettivamente 1, 2, 3, dobbiamo calcolare quante sestine con i numeri 1, 2, 3 e nessuno degli altri giocati si possono realizzare (in questo modo abbiamo una vincita per biglietto grazie alla presenza di 1, 2, 3), poi aggiungere i casi in cui vi sono due tra i numeri $\{1,2,3\}$ e un numero tra $\{4,5,6\}$ e un numero tra $\{7,8,9\}$ (cioè abbiamo fissato 4 numeri) e gli altri due rimanenti li scegliamo tra i numeri non giocati, poi dobbiamo aggiungere il caso in cui compare uno solo dei numeri $\{1,2,3\}$ e due tra i numeri $\{4,5,6\}$ e due tra i numeri $\{7,8,9\}$ (così ne abbiamo fissati 5) e l'ultimo da scegliere tra i numeri non giocati e infine dobbiamo aggiungere il caso in cui non abbiamo nessuno dei numeri $\{1,2,3\}$, cioè il solo caso in cui esca $\{4,5,6,7,8,9.\}$. Quindi se indichiamo con A_K l'evento corrispondente all'uscita delle sestine con K numeri tra $\{1,2,3\}$ abbiamo che

$$A_3 \cup A_2 \cup A_1 \cup A_0$$

è l'evento corrispondente alle sestine i cui numeri determinano una vincita del premio di consolazione (una ed una sola) per ciascun biglietto (altrimenti avremmo più di tre numeri indovinati per biglietto o altre combinazioni).

Poiché $A_K \cap A_J = \phi$ per $K \neq J$ abbiamo che

$$\#(A_3 \cup A_2 \cup A_1 \cup A_0) = \#A_3 + \#A_2 + \#A_1 + \#A_0 \quad \text{e}$$

$$\#A_3 = \binom{40}{3}; \quad \#A_2 = \binom{3}{2}\binom{3}{1}\binom{3}{1}\binom{40}{2}; \quad A_1 = \binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{2}\binom{40}{1}$$

$$\#A_0 = 1.$$

Lo spazio $\Omega = C_{49,6}$ e la funzione di probabilità è quella data dalla distribuzione uniforme. Quindi

$$P(A_3 \cup A_2 \cup A_1 \cup A_0) = \frac{\#(A_3 \cup A_2 \cup A_1 \cup A_0)}{\#\Omega}$$

$$= \frac{\binom{40}{3} + \binom{3}{2}\binom{3}{1}\binom{3}{1}\binom{40}{2} + \binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{2}\binom{40}{1} + 1}{\binom{49}{6}}$$

$$= \frac{\frac{40!}{3!\,37!} + \frac{3!}{2!\,1!}\,\frac{3!}{1!\,2!}\,\frac{3!}{1!\,2!}\,\frac{40!}{2!\,38!} + \frac{3!}{1!\,2!}\,\frac{3!}{2!\,1!}\,\frac{3!}{2!\,1!}\,\frac{40!}{1!\,39!} + 1}{\frac{49!}{6!\,43!}}$$

$$= \frac{\frac{38\cdot 39\cdot 40}{6} + 27\cdot\frac{39\cdot 40}{2} + 27\cdot 40 + 1}{\frac{\overset{11}{\cancel{44}}\cdot\overset{3}{\cancel{45}}\cdot\overset{23}{\cancel{46}}\cdot 47\cdot\overset{8}{\cancel{48}}\cdot 49}{\cancel{6}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}} = \frac{38\cdot 13\cdot 20 + 27\cdot 39\cdot 20 + 27\cdot 40 + 1}{11\cdot 3\cdot 23\cdot 47\cdot 8\cdot 49}$$

divis. per 11

$$= \frac{32021}{13983816} = \frac{2911}{1271256} \simeq 0{,}0022898$$

div. per 11

2 (i) C'è una sola funzione che manda tutti gli elementi del dominio nel numero 2. Quindi la probabilità cercata è $\frac{1}{n^n}$, perché $n^n = \# F(\{1,\dots,n\},\{1,\dots,n\})$

(ii) Stesso discorso di (i), cioè la prob. cercata è $\frac{1}{n^n}$

(iii) Se l'elemento J del codominio è immagine di k elementi del dominio, allora rimangono n-k elementi nel dominio da associare agli n elementi del codominio. Quindi, poiché ci sono $\binom{n}{k}$ sottoinsiemi dell'insieme $\{1,\dots,n\}$, avremo che le funzioni con tale proprietà saranno $\binom{n}{k}\cdot(n-k)^n$, perché sono disponibili n-k elementi da associare ancora a n elementi. Pertanto la probabilità di selezionare una funzione di questo tipo è

$$\frac{\binom{n}{k}(n-k)^n}{n^n}.$$

(iv) Se l'elemento i è trasformato nell'elemento J del codominio significa che rimangono n-1 elementi del dominio da associare agli n elementi del codominio. Quindi ci sono n^{n-1} funzioni pertanto la probabilità sarà

$$\frac{n^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n}$$

(v) le funzioni di questo tipo lasciano n-k elementi da associare nel dominio, mentre nel codominio rimangono sempre n elementi a cui far corrispondere gli n-k elementi del dominio. Avremo quindi n^{n-k} funzioni. La probabilità di selezionare una funzione di questo tipo è $\frac{n^{n-k}}{n^n} = \frac{1}{n^k}$

#3 $\mathbb{P}(\eta_1 \le t) = \mathbb{P}(\max\{X, 2-X\} \le t)$ dove

X denota la coordinata del punto nell'intervallo $[0,2]$ che ha distribuzione uniforme. Allora, da $X < 2-X \iff X < 1$ segue che

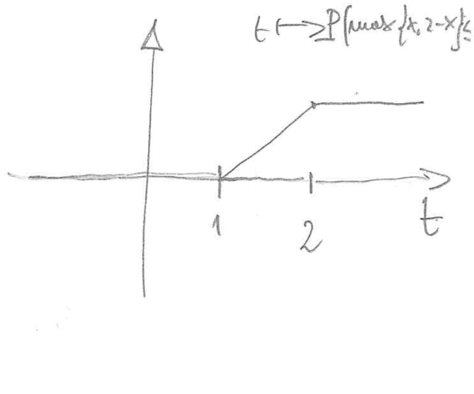
$$\mathbb{P}(\max\{X, 2-X\} \le t) = \mathbb{P}(X<1,\ 2-X \le t) + \mathbb{P}(X \ge 1,\ X \le t)$$

$$= \mathbb{P}(2-t < X < 1) + \mathbb{P}(1 \le X < t)$$

$$= \begin{cases} \mathbb{P}(2-t < X < t) & \text{se } t > 1 \\ 0 & \text{se } t \le 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\int_{2-t}^{t} \chi_{[0,2]}(s)\,ds = \begin{cases} \frac{1}{2}(t-2+t) & 1<t<2 \\ 1 & t>2 \end{cases} \\ 0 & t \le 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & t \le 1 \\ t-1 & 1<t<2 \\ 1 & t \ge 2 \end{cases}$$



Analogamente

$$\mathbb{P}(\eta_2 \le t) = \mathbb{P}(\min\{X, 2-X\} \le t) = \mathbb{P}(X<1 \text{ e } X \le t) + \mathbb{P}(X \ge 1 \text{ e } 2-X \le t)$$

$$= \mathbb{P}(X<1 \text{ e } X \le t) + \mathbb{P}(1 \le X \text{ e } 2-t \le X)$$

$$= \begin{cases} 0, & t<0 \\ \mathbb{P}(X<1 \text{ e } X \le t) + \mathbb{P}(2-t \le X), & 0<t<1 \\ \mathbb{P}(X<1) + \mathbb{P}(1 \le X) = 1, & 1 \le t \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & , \quad t<0 \\ \frac{1}{2}\int_0^t \chi_{[0,2]}(s)\,ds + \frac{1}{2}\int_{2-t}^{2} \chi_{[0,2]}(s)\,ds & \quad 0 \le t < 1 \\ 1 & , \quad t \geq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \quad t<0 \\ \frac{1}{2}\, t + \frac{1}{2}\, t & , \quad 0 \le t < 1 \\ 1 & , \quad t \geq 1. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \quad t<0 \\ t & , \quad 0 \le t < 1 \\ 1 & , \quad t \geq 1 \end{cases}$$