

ESEMPIO di PROVA per la parte di Elementi di Calcolo delle
Probabilità A.A. 2011/2012 per il corso di Complementi di Analisi
Matematica e Elementi di Calcolo delle Probabilità

PARTE DI ESERCIZI

(1) [punti] Un giocatore riceve all'inizio del gioco cinque carte da un mazzo di 52.

- (a) calcolare la probabilità che riceva almeno 3 re.
- (b) calcolare la probabilità che riceva 4 carte dello stesso seme.
- (c) calcolare la probabilità che riceva 4 donne.

(2) [punti] Siano X_1, X_2, X_3, X_4 delle variabili aleatorie di Bernoulli $B(1, p)$ indipendenti. Sia

$$S_4 = \sum_{i=1}^4 X_i.$$

- (a) calcolare la distribuzione condizionale di X_i , $1 \leq i \leq 4$ sapendo che $S_4 = 3$.
- (b) sia $S_2 = \sum_{i=1}^2 X_i$. Calcolare la legge condizionale di S_2 sapendo che $S_4 = 2$.
- (c) calcolare la media della variabile aleatoria condizionale determinata al punto (b).

(3) [punti] Sia $Z = (X, Y)$ una v.a. sul cerchio di raggio 2 di densità f così definita:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}, & \text{se } (x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\} \\ 0, & \text{se } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}. \end{cases}$$

Calcolare le densità marginali di X e Y

(4) [punti] Sia X una v.a. reale di densità g . Determinare la densità della v.a. $X^2 - 4$.

(5) [punti] Sia X una v. a. discreta che assume i valori $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, dove $x_i = \left(-\frac{1}{2}\right)^i$ con densità di probabilità $p(x_i) = \frac{2}{3^{i+1}}$, $i \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$.

(a) verificare che p è una densità di probabilità.

(b) verificare che la v.a. X ha speranza matematica finita.

(c) determinare $E[X]$, la speranza matematica di X .

(d) calcolare il valore di $E[Y]$ nel caso in cui la v. a. Y assuma i valori $y_i = \left(\frac{1}{2}\right)^i$ con densità di probabilità $p(y_i) = \frac{2}{3^{i+1}}$, $i \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$.

(e) calcolare $E(Y^2)$, momento di ordine due di Y e $\text{Var}[Y]$ (la varianza di Y).

PARTE DI TEORIA

(6) [punti] Scrivere il Teorema sulla disuguaglianza di Chebyshev.

(7) [punti] Scrivere la definizione di variabile aleatoria discreta.

(8) [punti] Scrivere la definizione di probabilità condizionale.

(9) [punti] Elencare le proprietà della varianza di una v.a. discreta.

Indicazioni di carattere generale.

Il numero di esercizi e di domande di teoria potrà subire variazioni in relazione alla difficoltà delle stesse. La tipologia degli esercizi e delle domande potrebbe subire modifiche di forma. In particolare il numero di esercizi non sarà superiore a 4 e il numero di domande non sarà superiore a 4. A fianco di ogni singolo esercizio o domanda verrà esplicitato il punteggio attribuibile. Per eventuali quesiti proposti sotto forma di quiz verrà attribuita una penalità alle risposte sbagliate (cioè un punteggio negativo) pari al punteggio massimo dell'esercizio diviso il numero delle possibili risposte.

Il punteggio a disposizione per la parte di Elementi di Calcolo delle Probabilità è 11. La parte di Elementi di Calcolo delle Probabilità è superata se si realizza un punteggio maggiore o uguale a 5. Tuttavia, essendo la parte di Elementi di Calcolo delle Probabilità parte integrante della prova A in cui compare anche una parte di Analisi Matematica con un punteggio di 10 punti, affinché la prova A possa considerarsi superata, occorre realizzare un punteggio maggiore o uguale a 5 anche nella parte di Analisi Matematica (5+5). In assenza di una valutazione positiva di entrambe le parti della prova A, la prova A dovrà essere ripetuta per entrambe le parti.