#1 In uno studio da avvocato ci sono 10 pratiche ciascuna delle quali contiene 4 fascicoli.
Si estraggono a sorte 8 fascicoli. Calcolare la probabilità che tra gli otto fascicoli non vi sia nessuna pratica completa.

#2 Sia $f(x,y) = \chi_{[0,1]}(x) \cdot \chi_{[0,1]}(y)$ la densità uniforme di due v.a. (X,Y). Calcolare la densità di $X+Y$ e disegnare il grafico della densità ottenuta.
Determinare le densità marginali di f

Sol. nelle pp. seguenti

#1 La probabilità che vogliamo calcolare è pari a
$1 - P$(c'è almeno una pratica tra gli otto fascicoli).

La P(c'è almeno una pratica tra gli otto fascicoli) *

$$= \frac{10\binom{8}{4}\cdot\binom{36}{4} - \binom{10}{2}}{\binom{40}{8}} = \frac{10\,\frac{8!}{4!4!}\cdot\frac{36!}{4!\,32!} - \frac{10!}{2!\,8!}}{\frac{40!}{8!\,32!}}$$

$$= \left(10\,\frac{8!}{4!4!}\cdot\frac{36!}{4!32!} - \frac{10!}{2!8!}\right)\frac{8!\,32!}{40!}$$

$$= 10\,\frac{8!}{4!4!}\cdot\frac{36!}{4!\cancel{32!}}\cdot\frac{8!\,\cancel{32!}}{40!} - \frac{10!}{2!\cancel{8!}}\cdot\frac{\cancel{8!}\,32!}{40!}$$

$$= 10\,\frac{8!}{4!4!}\cdot\frac{5\cdot6\cdot7\cdot8}{37\cdot38\cdot39\cdot40} - \frac{10!}{2\cdot33\cdot34\cdot35\cdot36\cdot37\cdot38\cdot39\cdot40}$$

$$= 10\,\frac{8!}{4!4!}\cdot\frac{\cancel{5\cdot6\cdot7\cdot8}}{37\cdot38\cdot39\cdot\cancel{40}} - \frac{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{7}\cdot\overset{2}{\cancel{8}}\cdot\cancel{9}\cdot\cancel{10}}{\cancel{2}\cdot\underset{11}{\cancel{33}}\cdot\underset{17}{34}\cdot\cancel{35}\cdot\underset{4}{\cancel{36}}\cdot37\cdot\underset{19}{\cancel{38}}\cdot\underset{13}{\cancel{39}}\cdot\cancel{40}}$$

$$= \frac{\overset{5}{\cancel{10}}\cdot 5\cdot\overset{12}{\cancel{36}}\cdot49\cdot\overset{4}{\cancel{8}}}{\cancel{4!}\,37\cdot\underset{19}{\cancel{38}}\cdot\underset{13}{\cancel{39}}} - \frac{1}{11\cdot17\cdot19\cdot13\cdot37}$$

$$= \frac{25\cdot49\cdot4\cdot11\cdot17 \quad -1}{11\cdot17\cdot19\cdot13\cdot37}$$

Quindi

$$1 - \frac{25\cdot49\cdot4\cdot11\cdot17 - 1}{11\cdot17\cdot19\cdot13\cdot33} = \frac{1708993 - 916299}{1708993} = \frac{792694}{1708993} \simeq 0{,}4638.$$

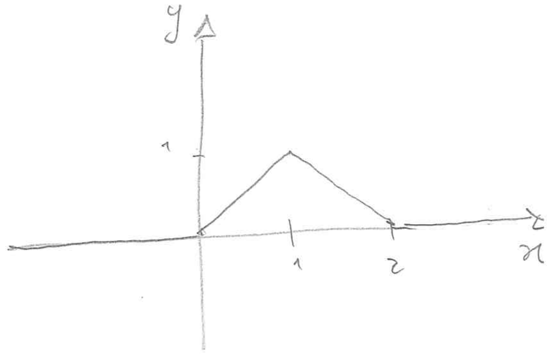
* vengono sottratti $\binom{10}{2}$ 8-ple, perché $10\binom{8}{4}\binom{36}{4}$ indica le 8-ple che contengono almeno una pratica e le 8-ple che contengono esattamente due pratiche contate due volte. Quindi bisogna sottrarre il numero di 8-ple con due pratiche a $10\binom{8}{4}\binom{36}{4}$.

2.

$$z \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[0,1]}(x) \cdot \chi_{[0,1]}(z-x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{1} \chi_{[0,1]}(z-x)\,dx = - \int_{z}^{z-1} \chi_{[0,1]}(s)\,ds = \int_{z-1}^{z} \chi_{[0,1]}(s)\,ds$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se} \quad z<0 \\ z & \text{se} \quad 0 \leq z < 1 \\ 2-z & \text{se} \quad 1 \leq z < 2 \\ 0 & \text{se} \quad z > 2. \end{cases}$$



$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[0,1]}(x)\chi_{[0,1]}(y)\,dy = \int_{0}^{1} \chi_{[0,1]}(y)\,dy \cdot \chi_{[0,1]}(x) = \chi_{[0,1]}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[0,1]}(x)\,\chi_{[0,1]}(y)\,dx = \int_{0}^{1} \chi_{[0,1]}(x)\,dx \cdot \chi_{[0,1]}(y) = \chi_{[0,1]}(y) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$