Se il segnale Y ha $E[Y]=\mu$ e $Var[Y]=\eta^2$

L'osservazione $X = Y + W$, W v.a. che rappresenta un errore di misurazione (rumore) con $E[W]=0$ e $Var[W]=\sigma^2$

indip da Y. Stimare Y a partire da X.

$Var(X) = Var(Y) + Var(W)$ (perché Y è indipendente da W)

$= \eta^2 + \sigma^2$

$$Cov(X,Y) = E[(Y+W)Y] - E[Y+W]\,E[Y]$$

$$= E[Y^2] + \underbrace{E[W]E[Y]}_{\text{indip.}} - (E[Y])^2 - E[W]E[Y]$$

0

$$= Var(Y) = \eta^2 \quad ; \quad E[X] \overset{\text{linearità}}{=} E[Y] + E[W] = E[Y] \; ;$$

$$a = \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)} = \frac{\eta^2}{\sigma^2+\eta^2}$$

$$b = E[Y] - \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)} E[X] = \mu - \frac{\eta^2}{\sigma^2+\eta^2}\mu = \mu\left(\frac{\sigma^2+\cancel{\eta^2}-\cancel{\eta^2}}{\sigma^2+\eta^2}\right)$$

$$= \mu \frac{\sigma^2}{\sigma^2+\eta^2}$$

$$\boxed{Y = \frac{\sigma^2}{\sigma^2+\eta^2} X + \mu \frac{\sigma^2}{\sigma^2+\eta^2}}$$

ovvero è la retta di regressione cercata

$$Y = X + \mu\frac{\sigma^2}{\sigma^2+\eta^2} - \frac{\eta^2 X}{\sigma^2+\eta^2}$$