

ESERCIZI DI ELEMENTI DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

FAUSTO FERRARI

Esercizio 1 (Non conviene giocare al Win for Life)

In questo gioco si giocano 10 numeri scelti tra 20 numeri assegnati, per esempio i numeri naturali da 1 a 20. Si vince indovinando tutti e 10 i numeri sorteggiati, oppure non indovinandone neppure uno. Si vincono premi minori indovinando rispettivamente anche 1, 2, 3, 7, 8, 9 numeri tra i 10 giocati. Infine, esiste una combinazione ulteriore per cui, se oltre ai 10 numeri viene sorteggiato un ulteriore numero nuovamente scelto tra i 20 possibile, si realizza una super-vincita.

Calcolare la probabilità di vincere nei casi in cui viene assegnato un premio con una sola giocata.

Esercizio 2 (Non conviene giocare al totocalcio)

Calcolare la probabilità di fare 13 al totocalcio, quella di fare 12 e la probabilità di non indovinare nessun risultato.

(Il gioco del totocalcio è stato molto in voga in Italia fino alla fine degli anni 80. Esso era abbinato alle partite dei campionati di calcio. Per ciascuna delle 13 partite considerate i risultati possibili sono tre: 1, x , 2. Con questi simboli si indica rispettivamente la vittoria della squadra di casa, il pareggio e la vittoria della squadra che gioca in trasferta.)

Esercizio 3 (Non conviene giocare al lotto)

Calcolare la probabilità di fare: ambo, terno, quaterna e cinquina al gioco del lotto (o della tombola). In questo gioco vengono sorteggiati 5 numeri tra 90, tradizionalmente i numeri naturali tra 1 e 90 senza rimpiazzo.

Esercizio 4 (Non conviene giocare al superenalotto)

Il superenalotto è una variante del gioco del lotto. In questo gioco si vince indovinando tutti e 6 i numeri sorteggiati tra 90 (per esempio tra i numeri naturali da 1 a 90). Calcolare la probabilità di azzeccare tutti e 6 i numeri. Calcolare la probabilità di indovinare 5 dei 6 numeri sorteggiati e di indovinare un sesto numero sorteggiato tra gli 84 rimasti dopo il primo sorteggio. Questa combinazione è nota come $5 + 1$.

Esercizio 5

Da un mazzo di 40 carte in cui troviamo quattro semi diversi, ciascuno composto da un asso le carte da 2 a 7 e tre figure (fante donna e re), vengono estratte 3 carte (senza rimpiazzo). Calcolare la probabilità di avere 3 figure, 3 assi, 2 figure e un asso e, infine una figura un asso e un 5.

Esercizio 6 Da una scatola contenente 20 cellulari, di cui 5 difettosi si prendono a caso 3 cellulari. Calcolare la probabilità che almeno uno non sia difettoso.

Esercizio 7

Calcolare la probabilità che lanciando un dado si ottenga un numero dispari, un multiplo di 3 oppure esattamente 1.

Esercizio 8

Si lancino contemporaneamente 2 dadi. Si calcoli la probabilità di ottenere due numeri uguali. Si lancino contemporaneamente 3 dadi. Si calcoli la probabilità di ottenere tre numeri uguali. Si lancino contemporaneamente n dadi. Si calcoli la probabilità di ottenere n numeri uguali.

Esercizio 9

Si lanci un dado 2 volte. Si calcoli la probabilità di ottenere in sequenza due numeri uguali.

Date:

Si lanci un dado 3 volte. Si calcoli la probabilità di ottenere in sequenza tre numeri uguali.
 Si lanci un dado n volte. Si calcoli la probabilità di ottenere in sequenza n numeri uguali.

1. PROVE CON DENSITÀ DI BERNOULLI

Esercizio 9

Si realizzino trenta prove indipendenti consistenti ciascuna nel lancio simultaneo di 4 monete equilibrate. Calcolare la probabilità che si ottengano 4 teste in almeno un lancio.

Esercizio 10

Nella trasmissione di un messaggio la probabilità di distorcere un simbolo è pari a $\frac{1}{11}$. Calcolare le seguenti probabilità in un messaggio di 11 simboli:

- (a) non sarà distorto;
- (b) contiene esattamente 4 distorsioni;
- (c) contenga non più di quattro distorsioni.

Esercizio 11

Ogni prova consiste nel lancio di quattro dadi. Calcolare la probabilità che esattamente due volte 4 uno vengano ottenuti in 6 prove indipendenti.

Esercizio 12

Calcolare la probabilità che fra $2n$ prove con densità di Bernoulli con probabilità di successo p e di insuccesso $1 - p$ si verifichi l'evento di $m + n$ prove con successo e tutte le prove di numero pari abbiano successo.

Esercizio 13

Una particella si muove passando da un numero intero al suo successivo o al suo precedente seguendo una variabile aleatoria di densità di probabilità di Bernoulli $B(n, p)$. Ovvero in caso di successo il punto si sposta a destra all'intero successivo, in caso di insuccesso il punto si sposta a sinistra all'intero precedente. Se il punto parte da zero, calcolare la probabilità che in n passi la particella si muova da 0 a m .

2. PROBABILITÀ CONDIZIONALE

Esercizio 14 (Conviene ripetere il test delle malattie in caso di esito positivo, prima di preoccuparsi!)

Supponiamo di considerare un test medico di prevenzione con il quale si vuole scoprire se i è affetti da una malattia. Supponiamo che il suddetto test sia attendibile al del 98%. Cioè su cento persone che si sottopongono al test si ha che per 98 di essi l'esito del test coincide con lo stato reale di salute, mentre per due risulta che pur essendo positivi al test sono sani (falso positivo) oppure pur risultando negativi al test sono invece malati (falso negativo). Supponendo di sapere qual è la diffusione della malattia, cioè quanti sono i malati, diciamo il 3 per mille (su mille persone 3 sono malate) calcolare la probabilità che una persona risultata positiva al test sia in realtà sana (si supponga che la probabilità condizionale di un non malato di risultare positivo al test sia del 2% come la probabilità condizionale di un malato di risultare negativo al test sia sempre del 2%).

Esercizio 15

Una coppia di dadi viene lanciata. Calcolare la probabilità condizionale che uno dei dadi dia 3 dato che la somma è 7.

Esercizio 16

Quattro studenti sono scelti a caso in una classe di 11 ragazze e 13 ragazzi. Calcolare la probabilità che almeno una sia una ragazza dato che almeno uno è un ragazzo.

3. ESERCIZI SU PROBLEMI DI PROBABILITÀ CON RISULTATI CONTROINTUITIVI

Esercizio 18 (Monty Hall)

In un gioco il concorrente vincerà un'automobile se indovinerà dietro a quale delle tre porte si trova. Dietro ciascuna delle altre due si trova una capra. Dopo che il concorrente ha scelto una delle tre porte, il conduttore del gioco, che sa dove si trova l'automobile, apre una delle due porte che non sono state scelte dal concorrente mostrando che dietro di essa vi è una capra. A questo punto il conduttore offre al concorrente la possibilità di modificare la propria scelta iniziale. Tra le due strategie possibili per il concorrente, ovvero cambiare la scelta iniziale oppure non cambiarla, ve n'è una più conveniente? Calcolare la probabilità di vincere cambiando la scelta iniziale e calcolare poi la probabilità di vincere mantenendo la scelta iniziale.

Esercizio 19 (Tre carte)

Ci sono tre carte. Una, con entrambe le facce di colore rosso, una con entrambe le facce di colore bianco e una con una faccia bianca e una rossa. Si seleziona a caso una delle tre carte e la si pone sul tavolo senza guardare l'altra faccia. Se il lato visibile della carta scelta è rosso, qual è la probabilità che anche l'altro lato sia dello stesso colore (rosso)?