ESERCIZI DI ELEMENTI DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

Esercizio 1 (Non conviene giocare al Win for Life)

In questo gioco si giocano 10 numeri scelti tra 20 numeri assegnati, per esempio i numeri naturali da 1 a 20. Si vince indovinando tutti e 10 i numeri sorteggiati, oppure non indovinandone neppure uno. Si vincono premi minori indovinando rispettivamente anche $1, 2, 3, 7, 8, 9$ numeri tra i 10 giocati. Infine, esiste una combinazione ulteriore per cui, se oltre ai 10 numeri viene sorteggiato un ulteriore numero nuovamente scelto tra i 20 possibile, si realizza una super-vincita.

Calcolare la probabilità di vincere nei casi in cui viene assegnato un premio con una sola giocata.

Risposte esercizio 1

10 sono i numeri giocati. Quindi ne rimangono 10 non giocati. Se consideriamo l'insieme dei 10 numeri giocati come l'insieme delle palline rosse e i 10 numeri non giocati tra i 20 possibili le palline bianche, allora abbiamo una distribuzione ipergeometrica per cui se A_k indica l'insieme di 10 numeri con k numeri appartenenti a l'insieme dei 10 numeri estratti abbiamo

$$P(A_k) = \frac{\binom{10}{k}\binom{10}{10-k}}{\binom{20}{10}}.$$

In particolare se $k = 10$

$$P(A_{10}) = \frac{\binom{10}{10}\binom{10}{0}}{\binom{20}{10}} = \frac{10!10!}{20!} = 10\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots 10}{11\cdot 12\cdot 13\cdots 20} = \frac{1}{11}\frac{1}{6}\frac{3}{13}\frac{2}{7}\frac{1}{3}\frac{3}{8}\frac{7}{17}\frac{4}{9}\frac{9}{19}\frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{11}\frac{1}{13}\frac{1}{7}\frac{1}{8}\frac{7}{17}\frac{4}{19}\frac{1}{2} = \frac{1}{11}\frac{1}{13}\frac{1}{4}\frac{1}{17}\frac{1}{19} = \frac{1}{184756} \sim 54\cdot 10^{-7}.$$

La probabilità che non esca nessuno dei 10 numeri giocati corrisponde a A_0 cioè

$$P(A_0) = \frac{\binom{10}{0}\binom{10}{10}}{\binom{20}{10}} = P(A_{10}).$$

Infatti questi due risultati danno diritto allo stesso tipo di premio.

Per i premi inferiori.

Un solo numero

$$P(A_1) = \frac{\binom{10}{1}\binom{10}{9}}{\binom{20}{10}} = \frac{10\frac{10!}{9!}}{\frac{20!}{10!10!}}$$
$$= 100\frac{10!10!}{20!} = 100\frac{1}{11}\frac{1}{13}\frac{1}{4}\frac{1}{17}\frac{1}{19} = \frac{100}{184756} \sim 54\cdot 10^{-5}$$

Due numeri

$$P(A_2) = \frac{\binom{10}{2}\binom{10}{8}}{\binom{20}{10}} = \frac{\frac{10!}{2\cdot 8!}\frac{10!}{8!2!}}{\frac{20!}{10!10!}}$$
$$= \frac{\left(\frac{10!}{2\cdot 8!}\right)^2}{\frac{20!}{10!10!}} = (45)^2\frac{10!10!}{20!} = (45)^2\frac{1}{11}\frac{1}{13}\frac{1}{4}\frac{1}{17}\frac{1}{19}$$
$$= \frac{2025}{184756} \sim 10,96\cdot 10^{-3}$$

Tre numeri

$$P(A_3) = \frac{\binom{10}{3}\binom{10}{7}}{\binom{20}{10}} = \frac{\frac{10!}{3!\cdot 7!}\frac{10!}{7!3!}}{\frac{20!}{10!10!}}$$

$$= \frac{(120)^2}{\frac{20!}{10!10!}} = 120^2 \frac{1}{11} \frac{1}{13} \frac{1}{4} \frac{1}{17} \frac{1}{19} = \frac{14400}{184756} \sim 7,79 \cdot 10^{-2}$$

Quattro numeri

$$P(A_4) = \frac{\binom{10}{4}\binom{10}{6}}{\binom{20}{10}} = \frac{\frac{10!}{4!\cdot 6!}\frac{10!}{6!4!}}{\frac{20!}{10!10!}}$$

$$= \frac{(\frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{24})^2}{\frac{20!}{10!10!}} = 210^2 \frac{1}{11} \frac{1}{13} \frac{1}{4} \frac{1}{17} \frac{1}{19} = \frac{44100}{184756} \sim 283 \cdot 10^{-3}$$

Cinque numeri

$$P(A_5) = \frac{\binom{10}{5}\binom{10}{5}}{\binom{20}{10}} = \frac{\frac{10!}{5!\cdot 5!}\frac{10!}{5!5!}}{\frac{20!}{10!10!}} = \frac{\left(\frac{6}{1}\frac{7}{2}\frac{8}{3}\frac{9}{4}\frac{2}{1}\right)^2}{\frac{20!}{10!10!}}$$

$$= \frac{(7 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 2)^2}{\frac{20!}{10!10!}} = 252^2 \frac{1}{11} \frac{1}{13} \frac{1}{4} \frac{1}{17} \frac{1}{19} = \frac{63504}{184756} = 3437 \cdot 10^{-4}$$

Sei numeri

$$P(A_6) = \frac{\binom{10}{6}\binom{10}{4}}{\binom{20}{10}} = P(A_4)$$

Sette numeri

$$P(A_7) = \frac{\binom{10}{7}\binom{10}{3}}{\binom{20}{10}} = P(A_3)$$

Otto numeri

$$P(A_8) = \frac{\binom{10}{8}\binom{10}{2}}{\binom{20}{10}} = P(A_2)$$

Nove numeri

$$P(A_9) = \frac{\binom{10}{9}\binom{10}{1}}{\binom{20}{10}} = P(A_1)$$

Si ottengono vincite minori solo per chi azzecca, oltre ai casi del 10 e dello 0, anche per 1 o 9, 2 o 7 numeri.

Esercizio 2 (Non conviene giocare al totocalcio)

Calcolare la probabilità di fare 13 al totocalcio, quella di fare 12 e la probabilità di non indovinare nessun risultato.

(Il gioco del totocalcio è stato molto in voga in Italia fino alla fine degli anni 80. Esso era abbinato alle partite dei campionati di calcio. Per ciascuna delle 13 partite considerate i risultati possibili sono tre: $1, x, 2$. Con questi simboli si indica rispettivamente la vittoria della squadra di casa, il pareggio e la vittoria della squadra che gioca in trasferta.)

Risposta

Lo spazio di probabilità può essere formalizzato con

$$\Omega = F_3^{13}$$

cioè l'insieme delle funzioni da un dominio di 13 elementi in tre elementi (i tre risultati possibili). Se si scrive l'immagine di una di queste funzione si ottiene una colonna. Quindi la probabilità di realizzare 13, cioè di indovinare tutti e 13 i risultati giocando una colonna a caso è:

$$P(13) = \frac{1}{3^{13}}.$$

Si può anche ragionare diversamente. La probabilità che si indovini un risultato per una partita è $\frac{1}{3}$. Poiché il risultato di ciascuna partita è indipendente dagli altri si ha che

$$P(M_1 \cap M_2) = P(M_1)P(M_1)$$

perché $P(M_1|M_2) = P(M_1)$. Allora la probabilità di realizzare 13 è data da

$$P(M_1 \cap M_1 \cap M_2 \cap \cdots \cap M_{13}) = P(M_1) \cdot P(M_2) \cdots P(M_{13}) = P(M_1)^{13} = \frac{1}{3^{13}}$$

La probabilità di non indovinare nessuno dei risultati delle 13 partite significa che per ogni partita la probabilità di non indovinare il risultato è pari a $\frac{2}{3}$. Pertanto, grazie all'indipendenza degli eventi considerati, si ottiene che la probabilità di non indovinare nessuno dei risultati è

$$P(0) = (\frac{2}{3})^{13}.$$

La probabilità di azzeccare 12 risultati dei 13 usciti può essere calcolata come segue. Ciascuna delle partite è una variabile aleatoria che assume valore 1 (nel caso in cui il risultato sia quello pronosticato) con probabilità $\frac{1}{3}$, altrimenti 0 (nei due rimanenti casi) con probabilità $\frac{2}{3}$. I risultati delle partite (prove) sono indipendenti (se non esistono accordi fraudolenti che condizionano i risultati...), quindi realizzare 12 significa contare quante colonne con 12 successi ci sono in una sequenza di 13 possibili.

Abbiamo allora uno spazio di probabilità

$$\Omega = \{\omega \in \{0,1\}^{\{1,2,\ldots,3\}}\} = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_{13}) : \quad \omega_i \in 0, 1, \quad i = 1, \ldots, 13\}$$

e una variabile aleatoria reale discreta X su Ω con densità di probabilità $B(13, \frac{1}{3})$ definita da

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{13} \omega_i.$$

La variabile aleatoria X conta i successi.

Pertanto la densità di probabilità della variabile aleatoria che conta i successi è:

$$P(X = k) = \binom{13}{k} (\frac{1}{3})^k (\frac{2}{3})^{13-k}.$$

In particolare

$$P(X = 12) = 13(\frac{1}{3})^{12}\frac{2}{3} = \frac{26}{3^{13}}.$$

Qual è la probabilità di realizzare almeno un 12 al totocalcio?

$$P(X \geq 12) = P(X = 12) + P(X = 13) = \frac{26}{3^{13}} + \frac{1}{3^{13}} = \frac{27}{3^{13}} = \frac{1}{3^{10}}.$$

Si noti che, se consideriamo $\lambda = 13\frac{1}{3} = \frac{13}{3}$, allora la densità di Poisson corrispondente è per $k = 0, \ldots, 13$:

$$e^{-\frac{13}{3}} \frac{\left(\frac{13}{3}\right)^k}{k!},$$

tuttavia non si tratta di una buona approssimazione.

Qual è la speranza matematica della variabile aleatoria discreta X che conta i successi. Ovvero qualè il valore atteso nel gioco del totocalcio?

$$E[X] = \sum_{k=0}^{13} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{13} k \binom{13}{k} (\frac{1}{3})^k (\frac{2}{3})^{13-k},$$

per calcolare questa media possiamo utilizzare la linearità dell'operatore di media. Infatti

$$X = \sum_{j=1}^{13} X_i,$$

dove per ogni $i = 1, \dots, 13$, X_i è una v.a. discreta con densità $B(1, \frac{1}{3})$.

Allora

$$E[X] = \sum_{i=1}^{13} E[X_i],$$

d'altra parte

$$E[X_i] = 0 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Pertanto

$$E[X] = \sum_{i=1}^{13} E[X_i] = \sum_{i=1}^{13} \frac{1}{3} = \frac{13}{3},$$

cioè la media dei risultati positivi attesi giocando al totocalcio è tra il 4 e il 5

Esercizio 3 (Non conviene giocare al lotto)

Calcolare la probabilità di fare: ambo, terno, quaterna e cinquina al gioco del lotto (o della tombola). In questo gioco vengono sorteggiati 5 numeri tra 90, tradizionalmente i numeri naturali tra 1 e 90 senza rimpiazzo.

Risposta

L'estrazione è di cinque numeri. Se j indica il numero dei numeri indovinati e k il numero di quelli giocati, allora la variabile aleatoria X che indica i successi ha una distribuzione di tipo ipergeometrico, $0 \leq j \leq k \leq 5$

$$P(X^{(k)} = j) = \frac{\binom{k}{j}\binom{90-k}{5-j}}{\binom{90}{5}}.$$

Quindi, la probabilità che siano sorteggiati esattamente i 3 numeri giocati tra i 5 estratti è

$$P(X^{(3)} = 3) = \frac{\binom{3}{3}\binom{90-3}{5-3}}{\binom{90}{5}} = \frac{\binom{87}{2}}{\binom{90}{5}} = \frac{87!}{2 \cdot 85!} \frac{5!85!}{90!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{88 \cdot 89 \cdot 90} = \frac{1}{22 \cdot 89 \cdot 6} \sim 8,51 \cdot 10^{-5}.$$

Mentre

$$P(X^{(5)} = 3) = \frac{\binom{5}{3}\binom{90-5}{5-3}}{\binom{90}{5}} = \frac{\frac{5!}{3!2!}\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}} = 10 \frac{85!}{2 \cdot 83!} \frac{5!85!}{90!} = 10 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{84 \cdot 85}{86 \cdot 87 \cdot 88 \cdot 89 \cdot 90}$$

$$= \frac{5 \cdot 84 \cdot 85}{86 \cdot 87 \cdot 22 \cdot 89 \cdot 3} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 85}{43 \cdot 87 \cdot 11 \cdot 89} \sim 8,12 \cdot 10^{-4}$$

indica la probabilità di uscita di tre dei cinque numeri giocati fra i cinque estratti.

Evidentemente le due probabilità sono diverse!

Quindi la probabilità di realizzare un ambo giocando esattamente due numeri è data da

$$P(X^{(2)} = 2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{90-2}{5-2}}{\binom{90}{5}} = \frac{\binom{88}{3}}{\binom{90}{5}} = \frac{88!}{3 \cdot 85!} \frac{5!85!}{90!} = \frac{4 \cdot 5}{89 \cdot 90} = \frac{1}{890} \sim 1,23 \cdot 10^{-3},$$

mentre la probabilità di realizzare ambo giocando 5 numeri è

$$P(X^{(5)} = 2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{90-5}{5-2}}{\binom{90}{5}} = \frac{\frac{5!}{3!2!}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}} = 10 \frac{85!}{3 \cdot 82!} \frac{5!85!}{90!} = \frac{10 \cdot 42 \cdot 85}{88 \cdot 89 \cdot 90} = \frac{7 \cdot 85}{44 \cdot 89 \cdot 3} \sim 5,06 \cdot 10^{-2}.$$

Nel caso di quattro numeri

$$P(X^{(4)}=4)=\frac{\binom{4}{4}\binom{90-4}{5-4}}{\binom{90}{5}}=\frac{\binom{86}{1}}{\binom{90}{5}}=\frac{86!}{1\cdot 85!}\frac{5!85!}{90!}=\frac{5!}{87\cdot 88\cdot 89\cdot 90}=\frac{3}{87\cdot 11\cdot 89\cdot 14}\sim 2,515{\cdot}10^{-6},$$

mentre la probabilità di indovinare 4 numeri fra i 5 giocati è

$$P(X^{(5)}=4)=\frac{\binom{5}{4}\binom{90-5}{5-4}}{\binom{90}{5}}=\frac{\frac{5!}{4!1!}\binom{85}{1}}{\binom{90}{5}}=5\cdot 85\cdot\frac{5!85!}{90!}=\frac{5\cdot 5!\cdot 85}{86\cdot 87\cdot 88\cdot 89\cdot 90}\sim 9,67\cdot 10^{-6}.$$

Infine la probabilità che siano estratti tutti e cinque i numeri giocati (inquina) è

$$P(X^{(5)}=5)=\frac{\binom{5}{5}\binom{90-5}{5-5}}{\binom{90}{5}}=\frac{\binom{85}{0}}{\binom{90}{5}}=\frac{5!85!}{90!}=\frac{5!}{86\cdot 87\cdot 88\cdot 89\cdot 90}=\frac{120}{86\cdot 87\cdot 88\cdot 89\cdot 90}\sim 2,275{\cdot}10^{-8}.$$

Esercizio 4 (Non conviene giocare al superenalotto)

Il superenalotto è una variante del gioco del lotto. In questo gioco si vince indovinando tutti e 6 i numeri sorteggiati tra 90 (per esempio tra i numeri naturali da 1 a 90). Calcolare la probabilità di azzeccare tutti e 6 i numeri. Calcolare la probabilità di indovinare 5 dei 6 numeri sorteggiati e di indovinare un sesto numero sorteggiato tra gli 84 rimasti domo il primo sorteggio. Questa combinazione è nota come $5+1$.

Risposta

In questo caso

$$P(6)=\frac{1}{\binom{90}{6}}=\frac{6!\cdot 84!}{90!}=\frac{6!}{85\cdot 86\cdot 87\cdot 88\cdot 89\cdot 90}=\frac{720}{85\cdot 86\cdot 87\cdot 88\cdot 89\cdot 90}=1,60\cdot 10^{-9}$$

Mentre la probabilità di indovinare 5 dei sei numeri giocati è sempre data da una densità ipergeometrica

$$P(5\quad\text{su}\quad 6)=\frac{\binom{6}{5}\binom{90-6}{6-5}}{\binom{90}{6}}=\frac{6\cdot\frac{84!}{1!\cdot 83!}}{\binom{90}{6}}=6\cdot 84\frac{6!84!}{90!}=\frac{6\cdot 84\cdot 6!}{85\cdot 86\cdot 87\cdot 88\cdot 89\cdot 90}\sim 8,09\cdot 10^{-7}.$$

Infine il cosiddetto $5+1$ ha probabilità di uscita pari a

$$P(5+1)=P(5\quad\text{su}\quad 6)\cdot\frac{1}{84}=\frac{6\cdot 6!}{85\cdot 86\cdot 87\cdot 88\cdot 89\cdot 90}\sim 9,63\cdot 10^{-9}.$$

Esercizio 5

Da un mazzo di 40 carte in cui troviamo quattro semi diversi, ciascuno composto da un asso le carte da 2 a 7 e tre figure (fante donna e re), vengono estratte 3 carte (senza rimpiazzo). Calcolare la probabilità di avere 3 figure, 3 assi, 2 figure e un asso e, infine una figura un asso e un 5.

Risposta

Per ogni seme ci sono 3 figure, quindi nel mazzo troveremo 12 figure in tutto. Analogamente ci saranno 4 assi in tutto e 24 carte di tipo diverso.

Allora, la probabilità di avere 3 figure si ottiene ancora considerando una distribuzione ipergeometrica

$$P(3F)=\frac{\binom{12}{3}\binom{28}{0}}{\binom{40}{3}}=\frac{12!}{3!\cdot 9!}\frac{3!\cdot 37!}{40!}=\frac{10\cdot 11\cdot 12}{38\cdot 39\cdot 40}\sim 2,22\cdot 10^{-6}.$$

Analogamente

$$P(3A)=\frac{\binom{4}{3}\binom{36}{0}}{\binom{40}{3}}=\frac{4!}{1!\cdot 3!}\frac{3!\cdot 37!}{40!}=\frac{24}{38\cdot 39\cdot 40}\sim 6,74\cdot 10^{-4}.$$

Nel caso di 2 figure e un asso conviene determinare quante sono le terne aventi la suddetta distribuzione nell'insieme delle figure e degli assi.

Quindi

$$\binom{12}{2}\binom{4}{1}.$$

La probabilità sarà allora

$$P(2F1A) = \frac{\binom{12}{2}\binom{4}{1}}{\binom{40}{3}} = \frac{12!}{2!\cdot 10!}\frac{3!\cdot 37!}{40!} = \frac{12\cdot 11\cdot 3}{38\cdot 39\cdot 40} \sim 6,68\cdot 10^{-3}$$

Nel caso in cui voglia calcolare la probabilità di uscita di una figura un asso e un cinque, avremo un numero di terne così composte pari a

$$\binom{12}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1} = 12\cdot 4\cdot 4 = 192,$$

infatti la terza carta potrà essere uno dei 4 cinque presenti nel mazzo. Pertanto

$$P(1A1F5) = \frac{192}{\binom{40}{3}} = \frac{192\cdot 3!\cdot 37!}{40!} = \frac{6\cdot 48}{38\cdot 39\cdot 10} = \frac{24}{19\cdot 13\cdot 5} = \frac{24}{1235} \sim 1,94\cdot 10^{-2}.$$

Diverso sarebbe se si considerasse una carta qualunque tra le 6 carte che non sono assi e figure. In tal caso avremmo un numero di terne favorevoli pari a:

$$\binom{12}{1}\binom{4}{1}\binom{6}{1} = 12\cdot 4\cdot 6 = 288.$$

Pertanto

$$P(1A1F1L) = \frac{288}{\binom{40}{3}} = \frac{864}{38\cdot 39\cdot 40} \sim 1,457\cdot 10^{-2}.$$

Infine se si fosse chiesta la probabilità di estrarre un asso una figura e il 5 di denari, allora i casi favorevoli si riducono a

$$\binom{12}{1}\binom{4}{1} = 12\cdot 4 = 48,$$

$$P(1A1F5D) = \frac{48}{\binom{40}{3}} = \frac{6}{1235} \sim 4,85\cdot 10^{-3}.$$

Esercizio 6 Da una scatola contenente 20 cellulari, di cui 5 difettosi si prendono a caso 3 cellulari. Calcolare la probabilità che almeno uno non sia difettoso.

Risposta

Ci sono 15 cellulari funzionanti e 5 difettosi. La probabilità che vi siano esattamente k cellulari difettosi su 3 selezionati è

$$P(X=k) = \frac{\binom{5}{k}\binom{15}{3-k}}{\binom{20}{3}}$$

dove k indica la variabile aleatoria che conta i cellulari difettosi su tre estratti.

Pertanto la probabilità dell'evento richiesto è:

$$P(X\le 2) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2) = 1-P(X=3) = 1-\frac{\binom{5}{3}\binom{15}{0}}{\binom{20}{3}} = 1-\frac{5!}{3!2!}\frac{3!\cdot 17!}{20!}$$

$$= 1-\frac{3\cdot 4\cdot 5}{18\cdot 19\cdot 20} = 1-\frac{1}{6\cdot 19} =\sim 0.991\cdot 10^{-1}.$$

Attenzione in questo caso non possiamo applicare uno schema di tipo Bernoulliano, perché non c'è rimpiazzo. Ovvero, l'estrazione di un cellulare, qualunque sia la sua qualità, altera la probabilità di estrarne, alla scelta successiva, uno funzionante o uno difettoso.

Saremmo giunti alla stessa conclusione anche calcolando la probabilità che tutti e tre siano difettosi per poi calcolare la probabilità dell'evento complementare, nel modo seguente.

Alla prima estrazione avremo $\frac{1}{4}$ di probabilità di trovare un cellulare difettoso.

$$P(2D|1D) = \frac{4}{19}.$$

Infine alla terza estrazione avremo che

$$P(3D|D2D1) = \frac{3}{18}.$$

Quindi

$$P(D1D2D3) = P(D3|D1D2)P(D1D2) = P(D3|D1D2)P(D2|D1)P(D1) = \frac{1}{4}\frac{4}{19}\frac{1}{6} = \frac{1}{6 \cdot 19}.$$

Pertanto

$$1 - P(D1D2D3) = 1 - \frac{1}{6 \cdot 19} \sim 0.991 \cdot 10^{-1}.$$

Esercizio 7

Calcolare la probabilità che lanciando un dado si ottenga un numero dispari, un multiplo di 3 oppure esattamente 1.

Risposta

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Quindi indicando D l'evento corrispondente all'uscita di un numero dispari

$$P(D) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

perché 3 sono i numeri dispari tra 1 e 6 inclusi.

I multipli di 3 tra 1 e 6 sono 2 esattamente 3 e 6. Quindi

$$P(M3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Infine

$$P(1) = \frac{1}{6}$$

Esercizio 8

Si lancino contemporaneamente 2 dadi. Si calcoli la probabilità di ottenere due numeri uguali.
Si lancino contemporaneamente 3 dadi. Si calcoli la probabilità di ottenere tre numeri uguali.
Si lancino contemporaneamente n dadi. Si calcoli la probabilità di ottenere n numeri uguali.

Risposta

Abbiamo Ω spazio di probabilità che dato da

$$\Omega = \{(n, m) : \quad n, m = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

L'evento a cui siamo interessati è quello corrispondente a

$$U = \{(n, n) : \quad n = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Pertanto

$$P(U) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

È utile osservare che avremmo anche potuto utilizzare la probabilità condizionale a partire da uno spazio di probabilità diverso $\Omega' = \{n : \quad n = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ calcolando

$$P(n2\text{et}n1) = P(n2|n1)P(n1)$$

Chiaramente $P(n1) = \frac{1}{6}$, mentre $P(n2|n1) = \frac{1}{6}$. Quindi $P(n2\text{et}n1) = \frac{1}{36}$. D'altra parte l'evento a cui siamo interessati può essere descritto in questo spazio come

$$U = \{(1\text{et}1) \cup (2\text{et}2) \cup (3\text{et}3) \cup (4\text{et}4) \cup (5\text{et}5) \cup (6\text{et}6)\}.$$

Quindi

$$P(U) = 6P(1\text{et}1) = \frac{1}{6}.$$

Nel caso del lancio di tre dadi abbiamo $\Omega_3 = \{(n_1, n_2, n_3) : \quad n_1, n_2, n_3 = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ inoltre

$$U_3 = \{(n, n, n) : \quad n = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Pertanto

$$P(U_3) = \frac{\#U_3}{\#\Omega_3} = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{6^2}.$$

In generale $\Omega_n = \{(j_1, j_2, \dots, j_n) : \quad j_1, \dots, j_n = 1, 2 \dots, 6\}$ e

$$U_n = \{(j, j, \dots, j) : \quad j = 1, \dots, 6\}.$$

Pertanto

$$P(U_n) = \frac{\#U_3}{\#\Omega_n} = \frac{6}{6^n} = \frac{1}{6^{n-1}}$$

Esercizio 9

Si lanci un dado 2 volte. Si calcoli la probabilità di ottenere in sequenza due numeri uguali.
Si lanci un dado 3 volte. Si calcoli la probabilità di ottenere in sequenza tre numeri uguali.
Si lanci un dado n volte. Si calcoli la probabilità di ottenere in sequenza n numeri uguali.

Risposta

Fissiamo un numero, diciamo 1. La probabilità che esca 1 al primo lancio è pari a $\frac{1}{6}$. La probabilità che esca di nuovo 1 è ancora $\frac{1}{6}$. Pertanto l'evento $(1, 1)$ avrà probabilità $\frac{1}{36}$. D'altra parte ci sono 6 numeri possibili, quindi $P(U_2) = 6P(1, 1) = \frac{1}{6}$. Pertanto le probabilità sono le stesse ricavate nell'esercizio precedente.

Il problema sarebbe diverso se richiedessimo di calcolare la probabilità che esca 1 due volte su due lanci, 3 volte su 3 lanci ecc.

In questo caso chiederemo che si verifichi n volte consecutive 1 in n lanci: $P(1, 1, 1, \dots, 1) = \frac{1}{6^n}$.

1. Prove con densità di Bernoulli

Esercizio 10

Si realizzino trenta prove indipendenti consistenti ciascuna nel lancio simultaneo di 4 monete equilibrate. Calcolare la probabilità che si ottengano 4 teste in almeno un lancio.

Risposta

Per ogni prova abbiamo il lancio simultaneo di 4 monete equilibrate. La probabilità che si ottengano 4 teste è $p = \frac{1}{2^4}$. Consideriamo la variabile aleatoria X che conta i successi. Allora

$$P(X = k) = \binom{30}{k} \left(\frac{1}{2^4}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2^4}\right)^{30-k}$$

è la probabilità che vi siano esattamente k successi in 30 prove. Ciò significa che le 4 monete danno sempre 4 teste.

Siamo interzati a calcolare la probabilità dell'evento $\{X \geq 1\}$. In particolare

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - \frac{1}{2^4})^{30}$$

Esercizio 11

Nella trasmissione di un messaggio la probabilià di distorcere un simbolo è pari a $\frac{1}{11}$. Calcolare le seguenti probabilità in un messaggio di 11 simboli:

(a) non sarà distorto;
(b) contiene esattamente 4 distorsioni;
(c) continene non più di quattro distorsioni.

Risposta

Indichiamo con X la variabile aleatoria che conta il numero di distorsioni. Allora X ha densità $B(11; \frac{1}{11})$.

(a) nessun carattere deve essere distorto. Quindi $P(X = 0) = \frac{1}{11^{11}}$;

(b) $P(X = 4) = \binom{11}{4}(\frac{1}{11})^4(1 - \frac{1}{11})^{11-4} = \binom{11}{4}(\frac{1}{11})^4(1 - \frac{1}{11})^7 = \binom{11}{4}(\frac{1}{11})^4(\frac{10}{11})^7$;

(c) $P(x \leq 4) = \sum_{k=0}^{4} \binom{11}{4}(\frac{1}{11})^k(\frac{10}{11})^{11-k}$.

Esercizio 12

Ogni prova consiste nel lancio di quattro dadi. Calcolare la probabilità che esattamente due volte 4 uno vengano ottenuti in 6 prove indipendenti.

Risposta

Lo svolgimento è simile a quello dell'esercizio precedente.

Calcoliamo a probabilità di ottenere 4 numeri uguali a 1. Allora $P(1, 1, 1, 1) = \frac{1}{6^4}$. Poniamo $p = \frac{1}{6^4}$. La variabile aleatoria X che conta i successi ha una distribuzione di tipo Bernoulli $B(6, p)$. Allora

$$P(X = 2) = \binom{6}{2}(\frac{1}{6^4})^2(1 - \frac{1}{6^4})^2$$

è la probabilità che si realizzino esattamente due successi.

Esercizio 13

Calcolare la probabilità che fra $2n$ prove con densità di Bernoulli con probabilità di successo p e di insuccesso $1-p$ si verifichi l'evento di $m+n$ prove con successo e tutte le prove di numero pari abbiano successo.

Risposta

L'evento a cui siamo interessati è l'intersezione di due eventi. In uno si richiede che $m + n$ prove abbiano successo. Nel secondo si richiede che le prove pari abbiano successo, vale a dire la seconda, la quarta ecc. Si noti che le prove sono complessivamente $2n$ cioè un numero pari. Inoltre $m + n$ è ovviamente maggiore del numero delle prove pari che corrisponde alla metà di $2n$. Allora se il numero di successi è $m + n$ dobbiamo considerare che di questi successi, n sono quelli che hanno avuto luogo nelle prove pari. Quindi ne rimangono altri n (le prove dispari) da considerare per il numero di sottoinsiemi di cardinalità m, cioè $\binom{n}{m}$. Pertanto la probabilità di un evento fissato di $m + n$ successi, cioè

$$p^{m+n}(1 - p)^{2n-m-n} = p^{m+n}(1 - p)^{n-m}$$

va moltiplicato per $\binom{n}{m}$. Quindi la probabilità dell'evento cercato è

$$\binom{n}{m}p^{m+n}(1 - p)^{n-m}$$

Esercizio 14

Una particella si muove passando da un numero intero al suo successivo o al suo precedente seguendo una variabile aleatoria di densità di probabilità di Bernoulli $B(n, p)$. Ovvero in caso di successo il punto si sposta a destra all'intero successivo, in caso di insuccesso il punto si sposta a sinistra all'intero precedente. Se il punto parte da zero, calcolare la probabilità che in n passi la particella si muova da 0 a m.

Risposta

Occorre chiaramente che $n \geq m$, altrimenti non sarebbe geometricamente possibile raggiungere il punto m. Detto questo, per raggiungere m occorrono almeno m successi. La differenza tra n e m, cioè $n - m$ dovrà essere equamente suddivisa in successi ed insuccessi, in modo tale che al passo n ci si ritrovi esattamente in m. Allora, se $n - m$ è pari ciò è possibile. Allora avremo in tutto $m + \frac{n-m}{2}$ successi e $\frac{n-m}{2}$ insuccessi con $\frac{n-m}{2}$ che è un numero naturale. In tal caso la probabilità di tale evento sarà pari a

$$\binom{n}{m+\frac{n-m}{2}} p^{m+\frac{n-m}{2}}(1-p)^{\frac{n-m}{2}} = \binom{n}{\frac{n+m}{2}} p^{\frac{n+m}{2}}(1-p)^{\frac{n-m}{2}}.$$

Se $n-m$ è dispari la probabilità dell'evento richiesto è zero.

2. Probabilità condizionale

Esercizio 15 (Conviene ripetere il test delle malattie in caso di esito positivo, prima di preoccuparsi!)

Supponiamo di considerare un test medico di prevenzione con il quale si vuole scoprire se si è affetti da una malattia. Supponiamo che il suddetto test sia attendibile al 98%. Cioè su cento persone che si sottopongono al test si ha che per 98 di essi l'esito del test coincide con lo stato reale di salute, mentre per due risulta che pur essendo positivi al test sono sani (falso positivo) oppure pur risultando negativi al test sono invece malati (falso negativo). Supponendo di sapere qual è la diffusione della malattia, cioè quanti sono i malati, diciamo il 3 per mille (su mille persone 3 sono malate), calcolare la probabilità che una persona risultata positiva al test sia in realtà sana (si supponga che la probabilità condizionale di un non malato di risultare positivo al test sia del 2% come la probabilità condizionale di un malato di risultare negativo al test sia sempre del 2%).

Risposta

L'attendibilità del test, cioè la probabilità che il test dia un risultato esatto, è pari a $0,98$.

Vogliamo calcolare

$$P(S|TP)$$

cioè la probabilità che la persona sia sana dato un test positivo. Quindi

$$P(S|TP) = \frac{P(S\cap TP)}{P(TP)}.$$

D'altra parte, sempre per la definizione di probabilità condizionale risulta anche:

$$P(S\cap TP) = P(TP|S)P(S).$$

In tal caso $P(TP|S) = 0,02$ e $P(S) = 0,997$ (il 3 per mille indica la proporzione dei malati). Quindi

$$P(S\cap TP) = 1994\cdot 10^{-5}.$$

Per la formula della probabilià totale abbiamo anche:

$$P(TP) = P(S\cap TP) + P(M\cap TP) = P(TP|S)P(S) + P(TP|M)P(M)$$
$$= 0.02\cdot 0,997 + 0.98\cdot 0.003 = 0,01994 + 0,00294 = 0,02288.$$

Pertanto

$$P(S|TP) = \frac{P(S\cap TP)}{P(TP)} = \frac{1994\cdot 10^{-5}}{2288\cdot 10^{-5}} = \frac{1994}{2288} \sim 0,8715.$$

Se si ripete il test

$$P(S|TP1\cap TP2) = \frac{P(S\cap TP1\cap TP2)}{P(TP1\cap TP2)}.$$

D'altra parte

$$P(S\cap TP1\cap TP2) = P(S\cap TP1)P(TP2|S\cap TP1) = 1994\cdot 10^{-5}\cdot 0,02 = 3988\cdot 10^{-7},$$

supponendo che $P(TP2|S\cap TP1) = 0,02$ cioè sia constante la probabilità di avere un falso positivo. Mentre

$$P(TP1\cap TP2) = P(TP1)P(TP2) = (0,02288)^2$$

perchè i due eventi si possono supporre indipendenti.

Quindi

$$P(S|TP1 \cap TP2) = \frac{3988 \cdot 10^{-7}}{(2288)^2 \cdot 10^{-10}} \sim 0,7618.$$

Ripetendo il test una terza volta avremo

$$P(S|TP1 \cap TP2 \cap TP3) = \frac{7976 \cdot 10^{-9}}{(2288)^3 \cdot 10^{-15}} \sim 0,66591.$$

Ripetendo il test una quarta volta

$$P(S|TP1 \cap TP2 \cap TP3 \cap TP4) = \frac{15952 \cdot 10^{-11}}{(2288)^4 \cdot 10^{-20}} \sim 0,58209.$$

Ripetendo infine il test una quinta volta

$$P(S|TP1 \cap TP2 \cap TP3 \cap TP4 \cap TP5) = \frac{31904 \cdot 10^{-13}}{(2288)^5 \cdot 10^{-25}} \sim 0,50882.$$

Vale la pena di fare un calcolo analogo in presenza di un falso negativo, per rendersi conto che si tratta di un evento assai meno probabile. Ovvero il caso di una persona malata per cui il test dà esito negativo. In questo caso è molto meno probabile che un esito negativo del test nasconda una persona ammalata.

Infatti

$$P(M|TN) = \frac{P(M \cap TN)}{P(TN)},$$

ma

$$P(M \cap TN) = P(TN|M)P(M) = 0,02 \cdot 0,003 = 6 \cdot 10^{-5}.$$

Inoltre

$$P(TN) = P(TN \cap M) + P(TN \cap S) = P(TN|M)P(M) + P(TN|S)P(S)$$

$$= 6 \cdot 10^{-5} + 0.98 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 6 \cdot 10^{-5} + 2,94 \cdot 10^{-3} = 3 \cdot 10^{-3}.$$

Quindi

$$P(M|TN) = \frac{P(M \cap TN)}{P(TN)} = \frac{6 \cdot 10^{-5}}{3 \cdot 10^{-3}} = 2 \cdot 10^{-2}.$$

Quindi la probabilità di un falso negativo è assai più piccola...

Insomma, se la malattia è poco diffusa rispetto all'attendibilità del test è probabile che le persone che risultano positive al test siano in realtà sane. D'altra parte, se la diffusione della malattia nella popolazione è del 3 per mille, vuol dire che su 1000 abitanti 3 saranno malati. Se 1000 persone si sottopongono al test, allora statisticamente per 20 di esse il responso del test non sarà attendibile. Se supponiamo che la metà di essi siano risultati positivi al test, ci ritroveremmo con ben 7 persone positive al test rispetto ai 3 malati attesi!

Esercizio 16

Una coppia di dadi viene lanciata. Calcolare la probabilità condizionale che uno dei dadi dia 3 dato che la somma è 7.

Risposta

Lo spazio di probabilità può essere fissato come

$$\Omega = \{(n,m) : \quad n,m = 1,2,3,4,5,6\}.$$

L'evento U a cui siamo interessati è

$$U = \{(3,n) : \quad n = 1,2,3,4,5,6\} \cup \{(n,3) : \quad n = 1,2,3,4,5,6\}$$

e più precisamente

$$P(U|n+m=7)=\frac{P(U\cap\{(n,m)\in\Omega:\quad n+m=7\})}{P(\{(n,m)\in\Omega:\quad n+m=7\})}.$$

D'altra parte

$$P(\{(n,m)\in\Omega:\quad n+m=7\})=\frac{\#\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}}{\#\Omega}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},$$

mentre

$$P(U\cap\{(n,m)\in\Omega:\quad n+m=7\})=\frac{\#\{(3,4),(4,3)\}}{\#\Omega}=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}.$$

Quindi

$$P(U|n+m=7)=\frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{3}.$$

Esercizio 17

Quattro studenti sono scelti a caso in una classe di 11 ragazze e 13 ragazzi. Calcolare la probabilità che almeno una sia una ragazza dato che almeno uno è un ragazzo.

Risposta

Si adatta bene la distribuzione ipergeometrica a questo esercizio. Possiamo considerare $n=4$ estrazioni. Rispetto a quanto visto a lezione, le ragazze possono essere considerate come l'insieme delle palline rosse, mentre i ragazzi possono essere considerati l'insieme delle palline bianche. Se X indica la variabile aleatoria che conta il numero di ragazze in un sorteggio di 4 persone, abbiamo che per $k\le 4$

$$P(X=k)=\frac{\binom{11}{k}\binom{13}{4-k}}{\binom{23}{4}}.$$

La domanda ci chiede di calcolare

$$P(X\ge 1|Y\ge 1),$$

dove Y indica il numero di ragazzi tra i quattro studenti scelti e $X+Y=4$. Allora

$$P(X\ge 1|Y\ge 1)=1-P(X=0|Y\ge 1)$$

$$=1-\frac{P(\{X=0\}\cap\{Y\ge 1\})}{P(Y\ge 1)}=1-\frac{P(\{X=0\})}{P(Y\ge 1)}$$

$$=1-\frac{\frac{\binom{11}{0}\binom{13}{4}}{\binom{23}{4}}}{P(Y\ge 1)}=1-\frac{\frac{\binom{11}{0}\binom{13}{4}}{\binom{23}{4}}}{\sum_{j=1}^{4}P(Y=j)}$$

$$=1-\frac{\frac{\binom{11}{0}\binom{13}{4}}{\binom{23}{4}}}{\sum_{j=1}^{4}\frac{\binom{13}{j}\binom{11}{4-j}}{\binom{23}{4}}}=1-\frac{\frac{13!}{4!9!}\frac{4!19!}{23!}}{\sum_{j=1}^{4}\frac{\binom{13}{j}\binom{11}{4-j}}{\binom{23}{4}}}$$

$$=1-\frac{\frac{13!}{4!9!}\frac{4!19!}{23!}}{1-\frac{\binom{13}{0}\binom{11}{4}}{\binom{23}{4}}}=1-\frac{\frac{13!}{4!9!}\frac{4!19!}{23!}}{1-\frac{11!}{4!7!}\frac{4!19!}{23!}}=1-\frac{\frac{10\cdot11\cdot12\cdot13}{20\cdot21\cdot22\cdot23}}{1-\frac{8\cdot9\cdot10\cdot11}{20\cdot21\cdot22\cdot23}}$$

$$=\frac{1-\frac{8\cdot9\cdot10\cdot11}{20\cdot21\cdot22\cdot23}-\frac{10\cdot11\cdot12\cdot13}{20\cdot21\cdot22\cdot23}}{1-\frac{8\cdot9\cdot10\cdot11}{20\cdot21\cdot22\cdot23}}=\frac{\frac{20\cdot21\cdot22\cdot23-8\cdot9\cdot10\cdot11-10\cdot11\cdot12\cdot13}{20\cdot21\cdot22\cdot23}}{\frac{20\cdot21\cdot22\cdot23-8\cdot9\cdot10\cdot11}{20\cdot21\cdot22\cdot23}}$$

$$=\frac{20\cdot21\cdot22\cdot23-8\cdot9\cdot10\cdot11-10\cdot11\cdot12\cdot13}{20\cdot21\cdot22\cdot23-8\cdot9\cdot10\cdot11}=\frac{187440}{204600}\sim 0,916$$

3. Esercizi su problemi di probabilità con risultati controintuitivi

Esercizio 18 (Monty Hall)

In un gioco il concorrente vincerà un'automobile se indovinerà dietro a quale delle tre porte si trova. Dietro ciascuna delle altre due si trova una capra. Dopo che il concorrente ha scelto una delle tre porte, il conduttore del gioco, che sa dove si trova l'automobile, apre una delle due porte che non sono state scelte dal concorrente mostrando che dietro di essa vi è una capra. A questo punto il conduttore offre al concorrente la possibilità di modificare la propria scelta iniziale. Tra le due strategie possibili per il concorrente, ovvero cambiare la scelta iniziale oppure non cambiarla, ve n'è una più coveniente? Calcolare la probabilità di vincere cambiando la scelta iniziale e calcolare poi la probabilità di vincere mantenendo la scelta iniziale.

Risposta

Ragioniamo in questo modo. Se dietro la porta scelta inizialmente non c'è l'automobile allora cambiare porta dopo che il conduttore ha aperto una delle porte che non abbiamo scelto significa vincere con probabilità 1. Cioè la vittoria è certa in due casi su tre, perché l'automobile potrebbe trovarsi dietro una delle altre due porte. Quindi la probabilità di vincere cambiando la scelta già effettuata è pari a $\frac{2}{3}$.

Possiamo anche esplicitare come segue.

Supponiamo che l'automobile sia dietro la terza porta: (C, C, A).

Se indichiamo con S la porta scelta inizialmente, avremo queste tre opzioni

(i): $(1, 2, S)$; (ii): $(1, S, 3)$ e (iii): $(S, 2, 3)$

Possiamo pensare di considerare come spazio di probabilità il seguente:

$$\Omega = \{(1, 2, S), (1, S, 3), (S, 2, 3)\}.$$

I casi $(1, S, 3), (S, 2, 3)$ se si cambia la scelta iniziale (dopo che è stata aperta una porta dietro la quale non c'è l'automobile da parte dal conduttore) danno un successo. Il caso $(1, 2, S)$ se si cambia la scelta iniziale (dopo che è stata aperta una porta dietro la quale non c'è l'automobile da parte dal conduttore), dà un insuccesso. Pertanto La probabilità di vincere cambiando la propria scelta, dopo che è stata aperta una porta dietro la quale non c'è l'automobile da parte dal conduttore, è pari a $\frac{2}{3}$.

Esercizio 19 (Tre carte)

Ci sono tre carte. Una, con entrambe le facce di colore rosso, una con entrambe le facce di colore bianco e una con una faccia bianca e una rossa. Si seleziona a caso una delle tre carte e la si pone sul tavolo senza guardare l'altra faccia. Se il lato visibile della carta scelta è rosso, qual è la probabilità che anche l'altro lato sia dello stesso colore (rosso)?

Risposta

Consideriamo lo spazio di probabilità dato da

$$\Omega = \{(R_1, R_2), (R_2, R_1), (B_1, R_2), (R_2, B_1), (B_1, B_2), (B_2, B_1)\}$$

Indichiamo con RN l'evento corrispondente alla faccia nascosta di colore rosso e con RV l'evento della faccia visibile di colore rosso

$$P(RN|RV) = \frac{P(RV \cap RN)}{P(RV)} = \frac{P((R_1, R_2), (R_2, R_1))}{P((R_1, R_2), (R_2, R_1), (R_2, B_1))} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

corrispondente a tutte le possibili disposizioni delle carte. Gli indici 1 e 2 indicano le facce