**Esercizio**
Sia assegnato

$$A = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3)\}.$$

(i) Calcolare il valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la funzione $p : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$,

$$p(i,j) = \begin{cases} \frac{\alpha}{i+j}, & (i,j) \in A \\ 0, & (i,j) \in \mathbb{R}^2 \setminus A, \end{cases} \tag{1}$$

è una densità di probabilità.

R.

$$1 = \sum_{(i,j)\in A} p(i,j) = \alpha \sum_{(i,j)\in A} \frac{1}{i+j} = \alpha \frac{19}{10}.$$

Quindi

$$\alpha = \frac{10}{19}.$$

(ii) Siano $X$ e $Y$ sono due variabili aleatorie di densità discreta congiunta $p$, come assegnata al punto (i) di questo esercizio. Calcolare

$$E[X+Y].$$

R.

$$E[X+Y] = \sum_{(i,j)\in A} (i+j)p(i,j) = \alpha \sum_{(i,j)\in A} (i+j)\frac{1}{i+j} = \alpha \sum_{(i,j)\in A} 1 = \alpha 7 = \frac{70}{19}$$

(iii) Calcolare le densità marginali $p_X$ e $p_Y$ della variabile aleatoria $2-$dimensionale $(X,Y)$ definita al punto (ii). Calcolare $E[X]$ e $E[Y]$.

R. Se $i = 1,2,3$ allora

$$p_X(i) = \alpha \sum_{(i,j)\in A} p(i,j) = \alpha \sum_{(i,j)\in A} \frac{1}{i+j}$$

altrimenti $P_X(i) = 0$. Se $j = 1,2,3,4$, allora

$$p_Y(j) = \alpha \sum_{(i,j)\in A} p(i,j) = \alpha \sum_{(i,j)\in A} \frac{1}{i+j}$$

altrimenti $p_Y(j) = 0$.

Per quanto riguarda $E[X]$ e $E[Y]$ abbiamo:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{3} ip_X(i) = \alpha\frac{10}{3},$$

mentre

$$E[Y] = \sum_{j=1}^{4} jp_Y(j) = \alpha\frac{11}{3}.$$

In particolare

$$E[X+Y] = \frac{\alpha}{7} = E[X] + E[Y] = \alpha\frac{10}{3} + \alpha\frac{11}{3}.$$

(iv) Calcolare Var$(X)$, e Cov$(X, Y)$.

Poiché

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y],$$

iniziamo con il calcolare

$$E[XY] = \sum_{(i,j)\in A} ijp(i,j) = \alpha\frac{36}{5}.$$

Quindi

$$Cov(X,Y) = \alpha\frac{36}{5} - \alpha^2\frac{210}{9} = -\frac{43440}{16245} \approx -2,674.$$

Inoltre

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{208 - \alpha 100}{9}\alpha = \frac{29520}{3249} \approx 9,08$$

(v) Determinare la retta di regressione.

R.

$$a = \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)} = -\frac{4344}{14760} \approx -0,2943;$$

$$b = E[Y] - \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)}E[X] = \frac{\alpha}{3}(11 + \frac{4344}{14760}) \approx 1,981.$$

Pertanto l'equazione della retta di regressione è

$$y = -\frac{4344}{14760}x + \frac{10}{57}(11 + \frac{4344}{14760})$$

**Esercizio**

Sia $X$ una variabile aleatoria di densità normale $N(0,1)$. Determinare la densità della variabile aleatoria $\exp(X)$. Disegnare un grafico qualitativo di tale densità.

R. La variabile aleatoria $Z = \exp(X)$ ha funzione di ripartizione

$$F_Z(t) = P(\exp(X) \leq t).$$

Quindi se $t \leq 0$ allora $F_Z(t) = 0$. Mentre se $t > 0$

$$F_Z(t) = P(\exp(X) \leq t) = P(X \leq \log t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\log t} e^{-\frac{s^2}{2}} ds.$$

Pertanto una densità di $F_Z$ si ottiene derivando $F_Z$. In particolare se $t > 0$

$$F_Z'(t) = \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log t)^2}{2}},$$

mentre se $t \leq 0$ tale densità è nulla.

**Esercizio**

Siano $\{X_i\}_{1\leq i\leq n}$ variabili aleatorie indipendenti ciascuna di densità di Poisson di parametro $\frac{1}{3}$. Fornire una stima di

$$P(\mid \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} - \frac{1}{3} \mid > \frac{1}{100}).$$

R.

Se ogni $X_i$ ha densità di Poisson di parametro $\frac{1}{3}$ allora

$$E[X_i] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{3}} k \frac{(\frac{1}{3})^k}{k!} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{3}} \frac{(\frac{1}{3})^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{3}} \frac{(\frac{1}{3})^j}{j!}$$

$$= \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{3})^j}{j!} = \frac{1}{3}.$$

D'altra parte

$$E[X_i^2] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{3}} k^2 \frac{(\frac{1}{3})^k}{k!} = \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\frac{1}{3})^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}} \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \frac{(\frac{1}{3})^j}{j!}$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) e^{-\frac{1}{3}} \frac{(\frac{1}{3})^j}{j!} = \frac{1}{3} E[X+1] = \frac{1}{3}(E[X]+1) = \frac{1}{3}(\frac{1}{3}+1) = \frac{4}{9}.$$

Quindi

$$Var[X_i] = E[X_i^2] - (E[X_i])^2 = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Si noti che questo calcolo vale per ogni parametro lambda nel caso di una densità di Poisson. Ovvero per variabili aleatorie con densità di Poisson di parametro $\lambda$ si ha $E[X] = \lambda = Var(X)$.

A questo punto abbiamo due opzioni. Se utilizziamo la disuguaglianza di Chebyshev per la legge dei grandi numeri otteniamo che

$$P(|\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} - \frac{1}{3}| > \frac{1}{100}) \leq \frac{\sigma^2}{n\frac{1}{100^2}} = \frac{100^2}{3n}.$$

D'altra parte, poiché vale

$$P(|\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} - \frac{1}{3}| > \frac{1}{100}) = 1 - P(|\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} - \frac{1}{3}| \leq \frac{1}{100})$$

e in generale si ha

$$\sqrt{n}\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} - \mu}{\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

allora anche per $\mu = \frac{1}{3}$ avremo

$$P(|\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} - \frac{1}{3}| \leq \frac{1}{100}) = P(|\sqrt{n}\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} - \frac{1}{3}}{\sqrt{3^{-1}}}| \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{3^{-1}}100}).$$

D'altra parte per il Teorema del limite centrale

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = S_n^* \sim N(0,1),$$

per $n \to +\infty$, si deduce che

$$P(|\sqrt{n}\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} - \frac{1}{3}}{\sqrt{3^{-1}}}| \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{3^{-1}}100}) \approx P(-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{3^{-1}}100} \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{3^{-1}}100}),$$

con $Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ variabile aleatoria che si approssima con la Gaussiana $N(0,1)$.

Pertanto

$$P(|\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} - \frac{1}{3}| > \frac{1}{100}) \approx 1 - P(-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{3^{-1}}100} \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{3^{-1}}100})$$

dove

$$1-(P(Z \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{3^{-1}}100})-P(Z \leq -\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{3^{-1}}100})) = 2\Phi(\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{3^{-1}}100})$$

e $\Phi$ è la funzione di ripartizione con distribuzione normale (Gaussiana) $N(0,1)$ di $Z$.

**Esercizio**

Sia $X$ una variabile aleatoria di densità esponenziale. Calcolare per quale valore reale $q$ è soddisfatta l'equazione

$$F(X \leq q) = \frac{2}{3},$$

dove con $F$ si indica la funzione di ripartizione della variabile aleatoria $X$.

R.

In questo caso per $t \geq 0$,

$$F_X(t) = \lambda \int_0^t e^{-\lambda s} ds = [-e^{-\lambda s}]_{s=0}^{s=t} = -e^{-\lambda t} + 1,$$

mentre $F_X(t)$ Quindi vogliamo risolvere l'equazione

$$F_X(q) = \frac{2}{3},$$

per cui

$$-e^{-\lambda q} + 1 = \frac{2}{3},$$

da cui

$$\frac{1}{3} = e^{-\lambda q},$$

cioè $-\lambda q = \log \frac{1}{3}$, da cui $q = -\frac{1}{\lambda} \log \frac{1}{3} = \frac{1}{\lambda} \log 3$. Il valore così ottenuto è chiamato quantile di ordine $\frac{2}{3}$.

**Esercizio** Siano $X$ e Y due variabili aleatorie di densità esponenziali indipendenti rispettivamente di parametri 3 e 5.

Calcolare

$$P(Y < 2X).$$

R. In qusto caso, poiché le variabili aleatorie sono indipendenti, la densità congiunta $(X,Y)$ è data dal prodotto delle densitm̀arginali. Più precisamente la densità congiunta per $s \geq 0$ e $t \geq 0$

$$f(s,t) = \lambda\mu e^{-\lambda s} e^{-\mu t}$$

mentre varrà 0 per $s < 0$ o $t < 0$.

Quindi

$$P(Y < 2X) = \int_{\{(s,t)\in\mathbb{R}^2: \quad t<2s\}} f(s,t)dsdt = \int_{\{(s,t)\in\mathbb{R}^2: \quad t<2s\}} \lambda\mu e^{-\lambda s} e^{-\mu t} dsdt$$

$$= \lambda\mu \int_{\{(s,t)\in\mathbb{R}^2: \quad t<2s\}} e^{-\lambda s ds} e^{-\mu t} dsdt$$

$$= \lambda\mu \int_0^{+\infty} (\int_{\frac{t}{2}}^{+\infty} e^{-\lambda s} ds) e^{-\mu t} dt = \mu \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\frac{t}{2}} e^{-\mu t} dt = \lim_{M\to\infty} [-\frac{\mu}{\frac{\lambda}{2}+\mu} e^{-(\frac{\lambda}{2}+\mu)t}]_{t=0}^{t=M} = \frac{\mu}{\frac{\lambda}{2}+\mu}.$$