Esercizio

Siano X e Y variabili aleatorie di densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{25}, & (x,y) \in [0,5] \times [0,5] \\ 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus [0,5] \times [0,5]. \end{cases}$$

Calcolare la funzione di ripartizione di $X+Y$ e la sua densità disegnandone il grafico.

R.

La funzione di ripartizione di $X+Y$ è

$$\begin{aligned} F(X+Y \leq t) &= \int\int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \quad x+y\leq t\}} f(x,y)dxdy \\ &= \int\int_{\{(x,y)\in[0,5]\times[0,5]: \quad x+y\leq t\}} f(x,y)dxdy \\ &= \frac{1}{25}\int\int_{\{(x,y)\in[0,5]\times[0,5]: \quad x+y\leq t\}} \chi_{[0,5]\times[0,5]}(x,y)dxdy \\ &= \frac{1}{25}\int_{-\infty}^{t}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[0,5]\times[0,5]}(x,z-x)dx\right)dy. \end{aligned}$$

Quindi la densità cercata è:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[0,5]\times[0,5]}(x,z-x)dx = \int_0^5 \chi_{[0,5]\times[0,5]}(x,z-x)dx.$$

Inoltre $0 \leq z-x \leq 5$ e $0 \leq x \leq 5$. Cioè $z-5 \leq x \leq z$ e $0 \leq x \leq 5$. Pertanto, se $z \leq 0$

$$\int_0^5 \chi_{[0,5]\times[0,5]}(x,z-x)dx = 0,$$

se $0 \leq z \leq 5$, allora

$$\int_0^5 \chi_{[0,5]\times[0,5]}(x,z-x)dx = \int_0^z dx = z.$$

Se $5 \leq z \leq 10$,

$$\int_0^5 \chi_{[0,5]\times[0,5]}(x,z-x)dx = \int_{z-5}^5 dx = 10-z.$$

Infine, se $z > 10$, allora

$$\int_0^5 \chi_{[0,5]\times[0,5]}(x,z-x)dx = 0.$$

Pertanto

$$g(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \frac{z}{25}, & 0 \le z < 5, \\ \frac{10-z}{25}, & 5 \le z < 10, \\ 0, & z \ge 10, \end{cases}$$

Esercizio

Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti di densità esponenziale rispettivamente di parametri 2 e 5. Calcolare la funzione di ripartizione della variabile aleatoria $X+Y$ e la sua densità.

R.

Poiché le variabili X e Y sono indipendenti la densità congiunta f di X e Y si esprimerà come il prodotto delle densità marginali che sono rispettivamente la densità esponenziale di parametro 2 per X e la densità esponenziale di parametro 5 per Y, cioè

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y),$$

dove

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

e

$$f_Y(y) = \begin{cases} 5e^{-5y}, & y \ge 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

Allora

$$g_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx = (f_X * f_Y)(z).$$

Poiché f_X e f_Y sono funzioni nulle per argomenti negativi si ha che il primo fattore della funzione integranda è nullo per $x \le 0$, quindi

$$(f_X * f_Y)(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx = \int_0^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx$$

inoltre il secondo fattore della funzione integranda è nullo per $z - x < 0$, cioè il secondo fattore è nullo nell'intervallo $]z, +\infty]$, quindi se $z < 0$ allora $(f_X * f_Y)(z) = 0$, mentre se $z > 0$, otteniamo:

$$g_{X+Y}(z) = \int_0^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx = 10 \int_0^z e^{-2x} e^{-5(z-x)}dx = 10e^{-5z} \int_0^z e^{3x}dx$$

$$= 10e^{-5z} [\frac{e^{3x}}{3}]_{x=0}^{x=z} = \frac{10}{3} e^{-5z}(e^{3z} - 1) = \frac{10}{3}(e^{-2z} - e^{-5z}).$$

(Ripetere il calcolo sassumendo che il parametro della delle due densità sia uguale a 5 sia per X che per Y).

Esercizio

Due punti vengono scelti nell'itervallo $[0,3]$ indipendentemente e con distribuzione uniforme. Calcolare la probabilità che la differenza tra delle distanze al quadrato dei singoli punti sia in valore assoluto maggiore di 1.

R.

La variabile aleatoria che rappresenta la scelta del punto X in $[0,3]$ ùniforme, quindi la sua densità è $f_X = \frac{1}{3}\chi_{[0,3]}$. Lo stesso dicasi per Y, cioè $f_Y = \frac{1}{3}\chi_{[0,3]}$. Poichsì assume che le due variabili aleatorie sono indipendenti abbiamo che la densitdi probabilità congiunta $f$di (X,Y) è

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{9}\chi_{[0,3]\times[0,3]}(x,y).$$

Allora la probabilità cercata è la seguente

$$P(\mid X^2 - Y^2 \mid > 1) = \int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \quad |x^2-y^2|>1\}} f(x,y)dxdy$$

$$= \frac{1}{9}\int_{\{(x,y)\in[0,3]\times[0,3]: \quad |x^2-y^2|>1\}} dxdy = 2\int_1^3 (\int_0^{\sqrt{x^2-1}} dy)dx$$

$$= 2\int_1^3 \sqrt{x^2-1}dx.$$

A questo punto l'integrale può essere calcolato con una sostituzione ponendo $x = \cosh(t)$ e poi procedendo per parti.

Esercizio Supponendo che il tempo di vita di una batteria di un giocattolo abbia un tempo di vita descritto da una variabile aleatoria di densità esponenziale di speranza matematica pari a 20 giorni. Stimare la probabilità che 30 pile siano sufficienti per un anno (si supponga che il giocattolo funzioni continuamente).

R. Se la speranza matematica di una variabile aleatoria è pari a 20 e sapendo che la sua densità esponenziale di parametro λ, possiamo determinare il valore di λ sapendo che

$$E[X] = \lambda\int_0^{+\infty} te^{-\lambda t}dt = [-te^{-\lambda t}]_{t=0}^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}dt = [-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}]_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

Quindi richiedendo $E[X] = 20$ ricaviamo $\lambda = \frac{1}{20}$. Siamo interessati a calcolare

$$P(\sum_{i=1}^{30} X_i > 365) = 1 - P(\sum_{i=1}^{30} X_i \leq 365) = 1 - P(\frac{\sum_{i=1}^{30} X_i - 30\cdot\mu}{\sigma\sqrt{30}} \leq \frac{365 - 30\cdot\mu}{\sigma\sqrt{30}}),$$

dove μ è la speranza matematica, pari a 20, di ogni singola variabile aleatoria.

Poiché possiamo supporre che che le singole variabili aleatorie siano indipendenti, per poter applicare il Teorema del limite centrale sarà sufficiente conoscere σ per variabili aleatorie di densità esponenziale.

In questo caso

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1}{20}\int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{1}{20}t} dt - 20^2$$

$$= [-t^2 e^{-\frac{1}{20}t}]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} te^{-\frac{t}{20}} dt - 400$$

$$= [-40te^{-\frac{t}{20}}]_{t=0}^{t=+\infty} + 40\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{20}} dt - 400 = [-800e^{-\frac{t}{20}}]_{t=0}^{t=+\infty} = 800 - 400 = 400.$$

Quindi $\sigma = \sqrt{400} = 20$. In particolare, dal Teorema del limite centrale si ha

$$P(\frac{\sum_{i=1}^{30} X_i - 30 \cdot \mu}{\sigma\sqrt{30}} \leq \frac{365 - 30 \cdot \mu}{\sigma\sqrt{30}}) \approx \Phi(\frac{365 - 30 \cdot \mu}{\sigma\sqrt{30}}).$$

Cioè

$$\Phi(\frac{365 - 30 \cdot \mu}{\sigma\sqrt{30}}) = \Phi(\frac{365 - 30 \cdot 20}{\sigma\sqrt{30}}) = \Phi(-\frac{235}{20\sqrt{30}}).$$

Poiché $-\frac{235}{20\sqrt{30}} \approx -2,145$, se ne deduce che

$$P(\sum_{i=1}^{30} X_i > 365) = 1 - P(\sum_{i=1}^{30} X_i \leq 365) \approx 1 - \Phi(-2,145).$$

D'altra parte, per la simmetria delle variabili aleatorie di densità normale si ha: $\Phi(\phi) = 1 - \Phi(-\phi)$ da cui segue

$$\Phi(-\phi) = 1 - \Phi(\phi).$$

Pertanto

$$P(\sum_{i=1}^{30} X_i > 365) = 1 - P(\sum_{i=1}^{30} X_i \leq 365) \approx \Phi(2,145) \approx 0,984.$$